

**НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ**

Математика

Методические указания по проведению практических занятий

35.03.06 *Агроинженерия*

Новосибирск 2024

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

УДК 51 (07)
ББК 22.1, я7
М 34

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, проф. Л.А. Назаров
Составитель: ст. преп. М.В.Грунина

Математика: методические указания по проведению практических занятий / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. М.В.Грунина. – Новосибирск, 2024. – 26 с.

В методических указаниях представлены задания для выполнения на практических занятиях, примерные варианты контрольных работ, вопросы к экзаменам, список рекомендуемой литературы.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения по направлениям подготовки: **35.03.06** Агроинженерия.

Содержание

Введение	4
Методические указания по освоению дисциплины	4
1 семестр	5
Раздел 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии	5
Раздел 3. Математический анализ	7
Вопросы к экзамену	10
2 семестр	12
Раздел 3. Математический анализ	12
Раздел 4. Дифференциальные уравнения	15
Вопросы к экзамену	16
3 семестр	17
Раздел 5. Ряды	18
Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика	18
Вопросы к экзамену	22
Литература	23

Введение

Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

- развить у студентов логическое мышление,
- познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,
- привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,
- привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент *должен*:

Знать:

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;
- основные понятия и методы математического анализа;
- дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

- использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

- методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

Методические указания по освоению дисциплины

Успешное освоение компетенций, формируемых данной учебной дисциплиной, предполагает оптимальное использование времени самостоятельной работы.

Все задания к практическим занятиям рекомендуется выполнять непосредственно после соответствующей темы лекционного курса, что способствует лучшему усвоению материала, позволяет своевременно выявить и устранить «пробелы» в знаниях, систематизировать ранее пройденный материал, на его основе приступить к получению новых знаний и овладению навыками.

Методические указания по выполнению контрольных работ

В процессе изучения дисциплины студент выполняет три контрольные работы, по одной в каждом семестре.

В первом семестре контрольная работа включает разделы «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Математический анализ», во втором семестре контрольная работа состоит из двух частей – работа по теме «Неопределенный интеграл» и по теме «Дифференциальные уравнения», в третьем семестре первая часть по теме «Ряды», вторая часть по теме «Теория вероятностей».

Критерии оценки выполнения контрольных работ

- оценка «отлично» выставляется при правильно выполненной задаче, аккуратно и чисто, в соответствии с требованиями, оформленном решении;
- оценка «хорошо» выставляется при правильно решенной задаче и при наличии в ходе выполнения незначительных помарок;
- оценка «удовлетворительно» выставляется, если после проверки в задаче будут исправлены все ошибки и она будет оформлена в соответствии с пунктом выше.
- во всех остальных случаях работа не засчитывается и выдается другой вариант.

1 семестр.

Раздел 2. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Занятия 1-2. Определители, матрицы.

Вычислить определители.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -10 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & \sqrt{a} \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} \quad 5. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

7. Найти $P(A)$, если

$$P(A) = A^2 - 9A^{-1} - 2|A|E, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Занятия 3-4. Системы линейных уравнений.

Решить системы уравнений

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + 4y + 6z = 3, \\ 3x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 4 \end{cases}$$

Занятия 5-7. Элементы векторной алгебры.

1. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы \vec{i} и \vec{j} . Выразить через \vec{i} и \vec{j} векторы \overline{OA} , \overline{AC} , \overline{CB} , \overline{BO} , \overline{OC} и \overline{BA} , если $OA = 3$ и $OB = 4$.

2. Пусть у прямоугольника $OACB$ из предыдущей задачи M – середина BC и N – середина AC . Определить векторы \overline{OM} , \overline{ON} и \overline{MN} при $OA = 3$ и $OB = 4$.
3. Построить точку $M(5; -3; 4)$ и определить длину её радиус-вектора.
4. Определить угол между векторами $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$.
5. Определить углы ΔABC с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(0; 0; 5)$.
6. Раскрыть скобки в выражении $(2\bar{i} - \bar{j}) \cdot \bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k}) \cdot \bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$
7. Вычислить: 1) $(\bar{m} + \bar{n})^2$, если \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы с углом между ними 30° ; 2) $(\bar{a} - \bar{b})^2$, если $|\bar{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 4$ и угол между векторами равен 135° .
8. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2\bar{m} + \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} - 2\bar{n}$, где \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы, угол между которыми 60° .
9. Дан вектор $\bar{a} = 2\bar{m} - \bar{n}$, где \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы с углом 120° между ними. Найти $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{m}})$ и $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{n}})$.
10. Определить и построить вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, если 1) $\bar{a} = 3\bar{i}$, $\bar{b} = 2\bar{k}$; 2) $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j}$; 3) $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + 2\bar{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} .
11. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7; 3; 4)$, $B(1; 0; 6)$ и $C(4; 5; -2)$.
12. Раскрыть скобки и упростить выражения:
- 1) $\bar{i} \times (\bar{j} + \bar{k}) - \bar{j} \times (\bar{i} + \bar{k}) + \bar{k} \times (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k})$;
 - 2) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{c} + (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times \bar{b} + (\bar{b} - \bar{c}) \times \bar{a}$;
 - 3) $(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} - \bar{a}) + (\bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b})$;
 - 4) $2\bar{i} \cdot (\bar{j} \times \bar{k}) + 3\bar{j} \cdot (\bar{i} \times \bar{k}) + 4\bar{k} \cdot (\bar{i} \times \bar{j})$.
13. Векторы \bar{a} и \bar{b} составляют угол 45° . Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $3\bar{a} + 2\bar{b}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 5$.
14. Построить параллелепипед на векторах $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\bar{b} = -3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 2\bar{j} + 5\bar{k}$ и вычислить его объём. Правой или левой будет тройка векторов $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$?
15. Построить пирамиду с вершинами $O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$ и $C(1; 2; 4)$ и вычислить её объём, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
- Занятия 8-9. Аналитическая геометрия на плоскости: прямая, кривые второго порядка.**
1. Построить прямые: 1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$.
2. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$. Сделать чертеж, написать уравнения сторон треугольника, медианы AE , высоты AD и найти длину медианы AE .
3. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$, найти его фокусы и эксцентриситет.
4. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что: 1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 3) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$.
5. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от земли до Солнца равно приблизительно 147,5 миллиона километров, а наибольшее 152,5 миллиона километров. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.
6. Построить гиперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ и её асимптоты. Найти фокусы, эксцентриситет и угол

между асимптотами.

7. Определить траекторию точки M , которая движется так, что остаётся вдвое дальше от точки $F(-8; 0)$, чем от прямой $x = -2$.

8. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от точки $F(0; 2)$ и от прямой $y = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить её.

9. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг её оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 10 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы?

Занятия 10-12. Аналитическая геометрия в пространстве: плоскость, прямая, взаимное положение прямой и плоскости.

1. Найти плоскость, проходящую через точку $(2; 2; -2)$ и параллельную плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1; -2; 0)$ и $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной к плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

5. Найти расстояние от точки $(5; 1; -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

6. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

7. Уравнения прямой $\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$ написать: 1) в проекциях; 2) в канонической форме.

Найти следы прямой на координатных плоскостях, построить прямую и её проекции.

8. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ и параллельной вектору $\vec{p} = \{-1; 1; 1\}$. Найти след прямой на плоскости yOz и построить прямую.

9. Построить прямую, проходящую через точки $A(2; -1; 3)$ и $B(2; 3; 3)$, и написать её уравнения.

10. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку $(-2; 1; -1)$ и параллельной вектору $\vec{p} = \{1; -2; 3\}$; 2) проходящей через точки $A(3; -1; 4)$ и $B(1; 1; 2)$.

11. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4; 3; 0)$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ и точку $(3; 4; 0)$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости $2x + 3y - z = 4$.

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}.$$

15. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x + 2y + 3z - 29 = 0$.

Раздел 3. Математический анализ

Занятие 13. Предел функции.

Вычислить пределы

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{x^2+1}$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{1-2x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}$.

8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt[3]{4x+7}-3}{x^2-x-20}$.

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right)$.

12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-10}+2}{x^2-3x+2}$.

Занятие 14. Замечательные пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$. 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}$. 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$. 5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos \frac{x}{2}}{x-\pi}$. 6. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{3n}$.

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{2x}$. 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-3x}-1}{x}$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot [\ln n - \ln(n+2)]$.

Занятия 15-18. Производная.

Найти производные функций:

1. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$.

2. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x$.

3. $y = x + 2\sqrt{x}$.

4. $y = \frac{10}{x^3}$.

5. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

7. $y = 3x - 6\sqrt{x}$.

9. $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

11. $y = x - \sin x$.

13. $y = x^2 \cos x$.

15. $y = \frac{\cos x}{x^2}$.

17. $y = \frac{x}{1-4x}$.

19. $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

21. $s = \frac{gt^2}{2}$.

23. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$; вычислить $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$.

24. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2x^2}$; вычислить $f'(2) - f'(-2)$.

25. $f(x) = \frac{x}{2x-1}$; найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$.

26. $y = \sin 6x$.

28. $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$.

30. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

32. $y = \sin \sqrt{x}$.

34. $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

36. $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$.

38. $y = x \ln x$.

40. $y = \lg 5x$.

6. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$.

8. $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

10. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

12. $y = x - \operatorname{tg} x$.

14. $y = x^2 \operatorname{ctg} x$.

16. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$.

18. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

20. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$.

22. $x = a(t - \sin t)$.

27. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$.

29. $y = \sin^2 x$.

31. $y = \operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x + 3x$.

33. $y = \frac{1}{(1 + \cos 4x)^5}$.

35. $y = x\sqrt{x^2-1}$.

37. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.

39. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$.

41. $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$.

$$42. y = \ln(x^2 + 2x). \quad 43. y = \ln(1 + \cos x).$$

$$44. y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x. \quad 45. y = x^2 + 3^x.$$

$$46. y = x^2 2^x. \quad 47. y = x^2 e^x.$$

Занятие 19. Исследование функций.

Провести полное исследование функции и построить её график:

$$1. y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x. \quad 2. y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$3. y = \frac{1}{1 + x^2}. \quad 4. y = x - \ln x.$$

Занятия 20-21 Функции нескольких переменных.

Найти частные производные функций:

$$1. z = x^3 + 3x^2 y - y^3. \quad 2. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$3. z = \frac{y}{x}. \quad 4. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Найти полные дифференциалы функций:

$$5. z = x^2 y. \quad 6. z = \frac{xy}{x - y}.$$

$$7. \text{Найти частные производные третьего порядка } z = x^3 + x^2 y + y^3.$$

$$8. \text{Найти частные производные четвёртого порядка } z = x^4 + 3x^2 y^2 - 2y^4.$$

9. Найти экстремум функций:

$$1) z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20; \quad 2) z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

Вопросы к экзамену

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Свойства определителей. Разложение определителей по строке и столбцу.
2. Правило Крамера решения систем линейных уравнений.
3. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
4. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли (без доказательства). Метод Гаусса.
5. Векторы. Линейные операции над векторами. Правила сложения векторов. Проекция векторов, их свойства.
6. Скалярное произведение векторов. Свойства.
7. Векторное произведение векторов. Свойства.
8. Смешанное произведение векторов. Свойства.
9. Теорема о максимальном числе линейно независимых векторов в системе. Базис.
10. Расстояние между двумя точками на плоскости. Деление отрезка в данном отношении.
11. Уравнения прямой на плоскости: общее, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору, каноническое, проходящей через две заданные точки, в отрезках на осях, с угловым коэффициентом, проходящей в данном направлении. Частные случаи общего уравнения прямой на плоскости.
12. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
13. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола. Канонические уравнения, эксцентриситет и директрисы. Асимптоты гиперболы.
14. Уравнение плоскости в пространстве: общее, с данным вектором нормали, проходящей через три заданные точки, в отрезках на осях. Частные случаи общего уравнения плоскости.

15. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
16. Расстояние от точки до плоскости.
17. Общие уравнения прямой в пространстве. Переход от общих к каноническим уравнениям.
18. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве.
19. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.
20. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

Математический анализ

21. Понятие предела последовательности. Основные теоремы о пределах последовательности.
22. Понятие предела функции. Основные теоремы о пределе функции.
23. Бесконечно малая величина. Основные теоремы о бесконечно малых.
24. Бесконечно большая величина. Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой.
25. Первый замечательный предел.
26. Второй замечательный предел.
27. Непрерывность функции в точке и на отрезке.
28. Классификация точек разрыва функции.
29. Асимптоты графика функции.
30. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
31. Правила дифференцирования.
32. Производные основных элементарных функций.
33. Связь производной и дифференциала.
34. Свойства дифференциала.
35. Дифференцирование функции, заданной параметрически.
36. Теорема Ролля.
37. Теорема Лагранжа.
38. Правило Лопитала (случай $\left[\frac{0}{0} \right]$).
39. Правило Лопитала (случай $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$).
40. Необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на отрезке.
41. Необходимое условие существования экстремума функции одной переменной.
42. Достаточные условия существования экстремума функции одной переменной.
43. Необходимое и достаточное условие выпуклости графика функции на отрезке.
44. Достаточное условие существования точки перегиба.
45. Частные производные первого порядка и их геометрический смысл.
46. Полный дифференциал функции двух переменных.
47. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных частных производных второго порядка.
48. Дифференциал второго порядка функции двух переменных.
49. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
50. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
51. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой и ограниченной области.

2 семестр**Раздел 3. Математический анализ****Занятия 1-2. Неопределенный интеграл**

Найти интегралы:

1. $\int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$. 2. $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$. 3. $\int \frac{x-2}{x^3} dx$.
4. $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$. 5. $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$. 6. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx$.
7. $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx$. 8. $\int a^x \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$. 9. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.
10. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$. 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$. 12. $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.
13. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$. 14. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$. 15. $\int \frac{dx}{x^2 - 25}$.
16. $\int \frac{dx}{x^2 + 9}$. 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}}$.
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$. 20. $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$. 21. $\int \left(\frac{3}{x^2 + 3} + \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx$.
22. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} \right) dx$. 23. $\int \cos 3x dx$. 24. $\int \sin \frac{x}{2} dx$.
25. $\int e^{-3x} dx$. 26. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$. 27. $\int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx$.
28. $\int \sqrt{4x-1} dx$. 29. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$. 30. $\int \frac{dx}{1-10x}$.

Занятия 3-4. Метод подстановки (замены переменной). Интегрирование по частям

1. $\int \frac{e^{3x}}{1-3e^{3x}} dx$. 2. $\int \operatorname{ctg} x dx$. 3. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.
4. $\int \sin^2 x \cos x dx$. 5. $\int e^{\cos x} \sin x dx$. 6. $\int e^{-x^2} x dx$.
7. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$. 9. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
10. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$. 11. $\int \ln x dx$. 11. $\int x \ln(x-1) dx$.
12. $\int x e^{2x} dx$. 13. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$. 14. $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

Занятие 5. Интегрирование рациональных дробей

$$1. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}. \quad 2. \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}. \quad 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

$$4. \int \frac{x^3}{x-2} dx. \quad 5. \int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx. \quad 6. \int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx.$$

$$7. \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx. \quad 8. \int \frac{(2x+1) dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Занятие 6. Интегрирование тригонометрических функций и иррациональных выражений

$$1. \int \sin^2 x dx. \quad 2. \int (1 + 2 \cos x)^2 dx. \quad 3. \int \cos^4 x dx.$$

$$4. \int \sin^2 x \cos^2 x dx. \quad 5. \int \sin^5 x dx. \quad 6. \int \sin^2 x \cos^3 x dx. \quad 7. \int \frac{dx}{\sin x}.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos x}. \quad 9. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}. \quad 10. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}+1}. \quad 11. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

Занятие 7. Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

Примерный вариант контрольной работы.

$$1. \int \frac{\ln 3x}{\sqrt{x}} dx$$

$$2. \int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-5}} dx$$

$$3. \int \frac{6x-1}{(x+4)(x-5)(x+1)} dx$$

$$4. \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)} dx$$

$$5. \int \sin^3 x dx$$

Занятия 8-10. Определенный интеграл

Вычислить:

$$1. \int_1^3 x^3 dx. \quad 2. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx. \quad 3. \int_1^4 \sqrt{x} dx.$$

$$4. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}. \quad 5. \int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}. \quad 6. \int_0^3 e^{x/3} dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}. \quad 8. \int_0^{\pi/4} \sin 4x dx. \quad 9. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$$

$$10. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} dx. \quad 11. \int_0^4 \frac{dx}{1 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$12. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx. \quad 13. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx.$$

Определить среднее значение функции:

14. $y = \sin x$ на отрезке $[0; \pi]$.

15. $y = \operatorname{tg} x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

16. $y = \ln x$ на отрезке $[1; e]$.

17. $y = x^2$ на отрезке $[a; b]$.

18. $y = \frac{1}{1+x^2}$ на отрезке $[-1; 1]$.

Вычислить площадь, ограниченную линиями:

19. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$. 20. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.

21. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$. 22. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

23. Одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ и осью Ox .

24. Астроидой $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$ 25. Кардиоидой $r = a(1 - \cos \varphi)$.

26. $r = 3 + \sin 2\varphi$ между смежными наибольшим и наименьшим радиус-векторами.

Определить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

27. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ вокруг оси Ox .

28. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ вокруг оси Oy .

29. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ вокруг оси Oy .

30. Одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси Ox .

Определить длину дуги кривой:

31. Одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

32. $y = \ln x$ от $x = \frac{3}{4}$ до $x = \frac{12}{5}$.

33. $y = \ln(2 \cos x)$ между смежными точками пересечения с осями Ox и Oy .

Занятие 11. Несобственный интеграл

Вычислить интегралы:

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

3. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^n}$.

5. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

6. $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$.

$$7. \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \quad 8. \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}. \quad 9. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Занятия 12-16. Двойной интеграл, понятие о тройном интеграле

Вычислить интегралы:

$$1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy. \quad 2. \int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy. \quad 3. \int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx.$$

$$4. \iint_D xy dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2).$$

$$5. \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

$$6. \iint_D \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1).$$

В задачах 7–11 найти пределы двукратного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ при данных (конечных)

областях интегрирования D .

7. Параллелограмм со сторонами $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

8. Треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

9. $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. 10. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

11. $y^2 \leq 8x$, $y \leq 2x$, $y + 4x - 24 \leq 0$.

В задачах 12–18 заменить порядок интегрирования.

$$12. \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \quad 13. \int_0^r dx \int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$14. \int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy. \quad 15. \int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy.$$

$$16. \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$17. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x, y) dy.$$

$$18. \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2}-3} f(x, y) dy.$$

Вычислить

19. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, где D – область, ограниченная параболой $y = x^2$ и $x = y^2$.

20. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, где D – область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$.

Преобразовать двойной интеграл к полярным координатам.

21. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy$. 22. $\int_{R/2}^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x, y) dx$.

23. $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$.

24. $\int_0^{R/\sqrt{1+R^2}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int_{R/\sqrt{1+R^2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f\left(\frac{x}{y}\right) dy$.

25. Вычислить в полярных координатах $\iint_D \arctg \frac{x}{y} dx dy$, где D – часть кольца $x^2 + y^2 \geq 1$,

$x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \leq x\sqrt{3}$.

Вычислить.

26. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$. 27. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyz dz$.

28. $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$, где Ω – область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z + 1 = 0$.

29. Перейти в тройном интеграле $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ к цилиндрическим координатам ρ , φ , z ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$), где Ω – область, находящаяся в первом октанте и ограниченная цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ и $y = x\sqrt{3}$.

Найти объёмы тел, ограниченных данными поверхностями.

30. Плоскостями координат, плоскостями $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом вращения $z = x^2 + y^2 + 1$.

31. Параболоидом $z = x^2 + y^2$, цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = 0$.

32. Найти массу квадратной пластинки со стороной $2a$, если плотность материала пластинки пропорциональна квадрату расстояния от точки пересечения диагоналей и на углах квадрата равна единице.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения

Занятия 17-18. Дифференциальные уравнения первого порядка

Найти общее решение дифференциальных уравнений:

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$.

2. $xyy' = 1 - x^2$.

3. $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$.

Однородные уравнения

4. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$.

5. $y' = \frac{x - y}{x + y}$.

6. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

7. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$.

Линейные уравнения и уравнения Бернулли

8. $y' + 2y = 4x$.

9. $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1$.

10. $y' = \frac{1}{2x - y^2}$.

11. $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

12. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$.

13. $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 0$.

Занятия 19-20. Дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнения высших порядков

1. $y'' = x + \sin x$.

2. $y'' = \ln x$.

3. $y''' = \frac{1}{x}$.

4. $y''' = \cos 2x$.

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

5. $y'' + y' - 2y = 0$.

6. $y'' - 9y = 0$.

7. $y'' - 4y' = 0$.

8. $y'' + y = 0$.

9. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

10. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

11. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

12. $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{sh} 2x$.

13. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3, 2$.

Занятие 21. Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»

Примерный вариант контрольной работы.

1. $y' = \frac{x + y}{x - y}$

2. $xy' + y = -x^2y^2$, $y(1) = 1$

3. $y'' = \frac{x}{\sqrt{(1 - 4x^2)^3}}$

4. $y'' - 2y' + y = 9e^{-2x} + 2x - 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

5. $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x}$

Вопросы к экзамену

Математический анализ

1. Теоремы о первообразных.

2. Свойства неопределённого интеграла.
3. Интегрирование по частям.
4. Интегрирование рациональных дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций.
6. Верхняя и нижняя интегральная сумма. Их свойства.
7. Свойства определённого интеграла.
8. Формула Ньютона – Лейбница.
9. Правила вычисления определённых интегралов.
10. Несобственные интегралы.
11. Геометрические приложения определённых интегралов.
12. сведение двойного интеграла к повторному
13. свойства двойного интеграла
14. замена переменных в двойном интеграле
15. двойной интеграл в полярных координатах
16. геометрические и физические приложения двойного интеграла
17. тройной интеграл: определение, теорема существования, свойства
18. свойства тройного интеграла
19. замена переменных в тройном интеграле
20. тройной интеграл в цилиндрических координатах
21. тройной интеграл в сферических координатах
22. геометрические и физические приложения тройного интеграла
23. криволинейный интеграл второго рода, свойства
24. формула Грина
25. условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования
26. поверхностный интеграл второго рода
27. формула Остроградского
28. формула Стокса
29. поток векторного поля

Дифференциальные уравнения

30. дифференциальные уравнения первого порядка, уравнения с разделяющимися переменными
31. однородные дифференциальные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним
32. линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Бернулли
33. дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка
34. определитель Вронского, свойства решений линейных однородных уравнений
35. структура общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами
36. неоднородные линейные уравнения второго порядка
37. частное решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

3 семестр

Раздел 5. Ряды

Занятие 1. Числовые ряды. Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Найти сумму ряда.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

$$2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4 - 5n}{n(n-1)(n-2)}.$$

Исследовать сходимость.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{2}}{n(n+1)(n+2)}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-5}{e^{3n}}.$$

$$9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Занятие 2. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Исследовать абсолютную или условную сходимость.

$$1. 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$2. \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \dots$$

$$3. -\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{4 \cdot 16} - \dots$$

$$4. \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \sin \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \sin \frac{\pi}{\sqrt{4}} - \dots$$

$$5. -\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n+2}}{n^3+6}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{n^2+3n+2}.$$

Занятие 3. Функциональные ряды: степенные ряды, ряды Тейлора и Маклорена.

Найти область сходимости степенного ряда:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n x^n}{4^n \cdot \sqrt{n}}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2^n + 5^n}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^n + 5^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \cdot \sqrt[5]{n+3}}.$$

Указанную функцию разложить в ряд Маклорена

$$5. -3 \ln(1+2x^2) + \cos x.$$

$$6. \sqrt[5]{1-5x}.$$

$$7. \frac{1}{\sqrt[5]{1+5x}}.$$

$$8. \frac{1}{(2+x)^2}.$$

Вычислить приближенно с точностью до 10^{-4} .

$$9. \ln 1,1.$$

$$10. \sqrt[4]{17}.$$

$$11. \int_0^{1/4} e^{-x^2} dx.$$

$$12. \int_0^{1/5} \sqrt[3]{1+x^2} dx.$$

Вычислить предел, используя разложение функций в ряд Тейлора.

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + x \sin x - 2}{x^4}.$$

Получить решение дифференциального уравнения в виде степенного ряда или ряда Тейлора.

$$15. y' = xy + 1, \quad y(0) = 1.$$

$$16. y' = x - y^2, \quad y(0) = 0.$$

Занятие 4. Контрольная работа по теме «Ряды».

Примерный вариант контрольной работы.

1. исследовать сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

2. исследовать абсолютную и условную сходимость

a. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \dots$; b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2n}{(n+1)!}$;

3. найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{7^n \cdot \sqrt[5]{n^3}}$;

4. получить 4 члена разложения в ряд Маклорена:

a. $\sqrt[4]{1-4x}$; b. $-\ln(1+2x^2) + 2x \sin 2x$;

5. найти 4 первых, отличных от нуля члена разложения в ряд Маклорена функции $y = f(x)$, являющейся решением дифференциального уравнения $y'' = x^2 y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

6. вычислить с точностью до 0,001 $\int_0^{0,25} x \ln(1 + \sqrt{x}) dx$.

Раздел 6. Теория вероятностей и математическая статистика

Занятия 5-6. Элементы комбинаторики. Классическое определение вероятности.

1. Каким числом способов 5 человек могут находиться в очереди?

2. Билет в автобус имеет шестизначный номер. Сколько существует номеров, у которых все цифры различные?

3. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 5?

4. Сколькими способами из 25 студентов группы можно:

a) выбрать актив в составе: староста, его заместитель, профорг;

b) выбрать трех дежурных?

5. На клумбе растут 9 красных и 6 белых роз. Сколькими способами из них можно составить букет из 3 белых и 2 красных роз?

6. Шесть ящиков различных материалов доставляются на 5 этажей стройки. Сколькими способами можно распределить ящики по этажам

7. Лифт с четырьмя пассажирами останавливается на 8 этажах. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта?

8. Монету подбрасывают два раза. Описать пространство элементарных исходов и события:

A – первый раз выпал герб;

B – один раз выпал герб;

C – выпал хотя бы один герб.

Являются ли совместными события A и B? B и C?

9. Образуют ли полную группу событий следующие события:

a) испытание: бросание монеты, события: A_1 – появление герба, A_2 – появление решки.

b) испытание: бросание двух монет, события: B_1 – появление двух гербов, B_2 – появление двух решек.

в) испытание: два выстрела по мишени, события: C_1 – одно попадание, C_2 – два попадания, C_0 – ни одного попадания.

г) испытание: два выстрела по мишени, события: D_1 – хотя бы одно попадание, D_2 – хотя бы один промах.

10. Выполнить действия: $A + \emptyset$; $A + \Omega$; $A + A$; $A \cdot \emptyset$; $A \cdot \Omega$; $A \cdot A$.

11. Среди студентов, пришедших на лекцию, наугад выбирают одного. Событие A – студент юноша, B – студент не курит, C – студент живет в общежитии. Описать события \overline{ABC} , $(A + B)C$.

При каком условии будет иметь место равенство $\overline{ABC} = A$?

Когда будет справедливо соотношение $\bar{C} = B$?

12. Какова вероятность выпадения хотя бы одного герба при двукратном бросании монеты?
13. Два игрока бросают игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков равна 10?
14. Какова вероятность того, что 7 случайно выбранных человек родились в разные дни недели?
15. В коробке 10 красных, 6 синих и 8 зеленых карандашей. Наугад вынимают три из них. Какова вероятность, что
 - а) все они разных цветов;
 - б) все они красные;
 - в) среди них два красных;
 - г) среди них два красных и один синий;
 - д) все они желтые?
16. Из 200 кур 50 белых, 100 красных и 50 полосатых, из 25 петухов 6 белых, 14 красных и 5 полосатых. Предполагая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность белой пары.
17. Наудачу выбирается шестизначное число. Какова вероятность, что число является палиндромом, т.е. одинаково читается как слева направо, так и справа налево?
18. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 4 человека. Каждый из них с равной вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Какова вероятность, что трое выйдут на одном этаже?
19. Каждый из 5 шаров случайным образом кладут в один из 6 ящиков. Какова вероятность, что все шары попадут в разные ящики?
20. В первой части курса из 20 вопросов студент знает 15, во второй части – из 10 знает 5. Какова вероятность того, что студент ответит на произвольные 2 вопроса, один из которых из первой части, а другой из второй?
21. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?
22. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?

Занятие 7. Теоремы сложения и умножения.

1. Студент пришёл на экзамен, зная лишь 50 из 60 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.
2. Определить вероятность того, что при трёхкратном бросании игральной кости ни разу не выпадет одно очко.
3. Два человека больны заболеванием, для которого коэффициент выздоровления составляет 98%. Найти вероятность того, что они оба выздоровеют.
4. Какова вероятность того, что из колоды в 36 игровых карт будут подряд вынуты 2 туза?
5. Всхожесть семян огурцов равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух посаженных семян хотя бы одно не взойдёт.
6. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпадет «шестёрка».
7. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Определить вероятность того, что это будет карта пиковой масти или туз.
8. Посадили по одному саженцу яблони и груши. Вероятность того, что приживётся саженец яблони, равна 0,9, саженец груши – 0,8. Найти вероятность того, что
 - а) оба саженца приживутся;
 - б) приживётся хотя бы один саженец;
 - в) ни один саженец не приживется;
 - г) приживется ровно один саженец.
9. В урне 2 белых, 3 чёрных и 5 красных шаров. Наугад извлекают три шара. Найти вероятность, что они одного цвета.
10. Три стрелка выстрелили по мишени по одному разу. Вероятность попадания для них 0,9; 0,8 и 0,7 соответственно. Найти вероятность, что мишень поражена не более одного раза.
11. Студент подготовил к экзамену 30 из 40 вопросов. На экзамене ему выдают два обязательных вопроса. Если он ответит на них, ему выдают два дополнительных вопроса, из которых для сдачи экзамена необходимо ответить хотя бы на один. Найти вероятность, что студент сдаст экзамен.

Занятия 8-9. Формула полной вероятности, формулы Байеса. Схема Бернулли.

1. Станок 30% времени обрабатывает деталь А и 70% – деталь В. При обработке детали А он простаивает 10% времени, а детали В – 15%. Какова вероятность застать станок простаивающим? Найти вероятность, что станок, который застали простаивающим, находился в режиме обработки детали В.

2. Три монтажника ведут сборку однотипных приборов, причём производительность их труда соотносится как 2:3:5. Вероятности сборки прибора отличного качества у них равны соответственно 0,8; 0,6 и 0,6. Найти вероятность, что взятый наудачу изготовленный ими прибор окажется отличного качества. Какова вероятность того, что прибор изготовлен первым рабочим, если он оказался отличного качества?

3. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложён чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

4. В первой урне 3 белых и 2 чёрных шара, во второй 3 белых и 5 чёрных. Из первой во вторую перекладывают, не глядя, два шара, после чего из второй урны извлекается шар. Найти вероятность того, что этот шар окажется белым. Какова вероятность того, что из первой во вторую урну были переложены чёрный и белый шары, если из второй урны извлечён белый шар?

5. Вероятность того, что телевизор безотказно проработает гарантийный срок, равна 0,8. Закупили 4 телевизора. Какова вероятность, что

- три телевизора не проработают гарантийный срок;
- не менее двух телевизоров проработают гарантийный срок.

6. Что более вероятно: выиграть у равносильного противника

- три партии из четырех или хотя бы три из восьми;
- три партии из четырех или пять из восьми;
- не менее трех из четырех или не менее пяти из восьми?

7. Известно, что вероятность выиграть хотя бы по одному лотерейному билету из трех равна 0,271.

Какова вероятность выиграть по всем трем билетам?

Занятие 10. Одномерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения одномерной дискретной случайной величины.

X	-1	0	2	4
p	0,2	a	0,3	0,2

Найти

- параметр a ;
- математическое ожидание $M(X)$;
- дисперсию $D(X)$.

2. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	3	4	5
p	1/3	1/3	1/3

Y	1	2
q	1/2	1/2

X – выручка фирмы, Y – затраты, $Z=X-Y$ – прибыль. Найти математическое ожидание случайной величины Z .

3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин:

X	0	2	4
p	0,8	0,1	0,1

Y	-2	0	2
q	0,5	0,2	0,3

Найти закон распределения случайной величины $Z=XY$.

4. Ведётся стрельба до первого попадания, но не свыше 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. X – число произведённых выстрелов. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

5. По мишени одновременно стреляют 4 стрелка с вероятностью попадания 0,6 для каждого. X – число попаданий. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

6. Из партии в 10 деталей, среди которых 4 бракованных, произвольным образом выбраны 3 детали. X – число бракованных деталей среди отобранных. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

7. В партии из 10 деталей содержится 7 деталей первого сорта. Случайным образом одну за другой без возвращения извлекаем детали до появления детали первого сорта. X – число попыток. Найти

закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

8. В семье 4 ребенка. X – число мальчиков. Построить ряд распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию. (Считать вероятности рождения мальчика и девочки равными).

Занятие 11. Одномерная непрерывная СВ.

1. Функция распределения задана в виде
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x-1}{2}, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, $P(2,5 < X < 3,5)$.

2. Функция распределения задана в виде
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Cx^2, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти параметр C , вычислить математическое ожидание и дисперсию.

3. Функция распределения задана в виде
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a(x-1)^2, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить значение параметра a математическое ожидание, дисперсию, $P(\frac{1}{2} < X < 2)$.

4. Случайная величина определяется плотностью
$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + \frac{1}{3}, & x \in (0;1), \\ 0, & x \notin (0;1). \end{cases}$$

Найти параметр A , математическое ожидание, дисперсию.

5. Случайная величина определяется плотностью
$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}$$
. Найти параметр a , функцию

распределения $F(x)$ и $P(|X| \leq 1)$.

Занятие 12. Двумерная дискретная СВ.

1. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	-1	0	1	2
1	0,10	0,25	0,30	0,15
2	0,10	0,05	0	0,05

Вычислить корреляционный момент случайных величин X и Y .

2. Дан закон распределения двумерной случайной величины

$X \setminus Y$	-1	0	1
1	0,15	0,30	0,35
2	0,05	0,05	0,10

Вычислить коэффициент корреляции случайных величин X и Y .

3. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу извлекают 2 шара. Случайная величина X – число белых шаров среди выбранных, Y – число черных шаров среди выбранных. Составить закон распределения случайного вектора (X, Y) .

4. Игральную кость подбрасывают два раза. Рассматривают две случайные величины: X – число выпадений единицы и Y – число выпадений шестерки. Построить матрицу распределения двумерной СВ (X, Y) и найти коэффициент корреляции.

Занятие 13. Контрольная работа.

Примерный вариант контрольной работы.

Задание 1. В группе из 14 животных 8 получают лечение, а 6 (контрольных) не получают. Какова вероятность того, что на 10 наудачу отобранных животных 4 контрольных?

Задание 2. Вероятности того, что на экзамене студент ответит на первый и второй вопросы, равны 0,7, а на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить на все три вопроса и результат ответа на любой из вопросов не влияет на результаты ответов на другие вопросы.

Задание 3. По оценкам, волк, нападающий в одиночку на лося, добивается успеха в 8% столкновений. Какова вероятность того, что в 2 столкновениях ни один лось не станет добычей волка?

Задание 4. Из колоды в 52 карты последовательно извлекают одну за другой три карты без возвращения в колоду. Найти вероятность того, что извлечена только одна десятка.

Задание 5. Плотность распределения случайной величины X

$f(x) = 1 - Ax$ на $(0;1)$, а при $x \notin (0,1)$ $f(x) = 0$. Требуется: 1) найти параметр A ; 2) найти математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение

Задание 6. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей. Найти:

- 1) частные законы распределения случайных величин X и Y ;
- 2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
- 3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
- 4) корреляционный момент C_{xy} ;
- 5) коэффициент корреляции r_{xy} ;
- 6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

$X \backslash Y$	-4	-2	0
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

Занятие 14. Нормальное распределение.

1. Случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1,5$ и $\sigma = 10$. Записать аналитическое выражение плотности распределения, функции распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию.

2. Годовое потребление угля на некотором предприятии зависит от климатических условий года и является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним, равным 300 тоннам и средним квадратическим отклонением, равным 5 тоннам. В плановом отделе предприятия решили, что запаса 310 тонн хватит на год с вероятностью 0,99. Правильно ли вычислили вероятность? Если неправильно, то определите, сколько угля надо запастись, чтобы с вероятностью 0,99 его хватило на год.

3. Расход бензина на 100 км для исправного автобуса – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения со средним, равным 15 кг, и средним квадратическим отклонением, равным 2 кг. На автобазе составлена инструкция, согласно которой, автобус отправляется в ремонт, если при испытании он расходует более 20 кг бензина на 100 км. Найти вероятность отправки в ремонт исправного автобуса. Как надо составить инструкцию, чтобы эта вероятность была 0,01?

4. В некоторой стране рост юношей призывного возраста – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону, со средним 180 см и средним квадратическим отклонением 10 см. призывника берут в гвардию, если его рост не меньше 200 см. какова доля призывников, попадающих в гвардию? Как надо изменить инструкцию, чтобы в гвардию призывать 10% новобранцев?

5. Известно, что масса деталей распределена по нормальному закону со средним 10 кг и средним квадратическим отклонением 250 г. Найти вероятность того, что масса случайно выбранной детали будет:

- а) превышать среднее значение детали не более чем на 500г;
- б) отклоняться от среднего значения не более, чем на 500 г.

Вопросы к экзамену

Ряды

1. ряды, свойства числовых рядов, необходимый признак сходимости;
2. расходимость гармонического ряда;
3. признаки сходимости знакоположительных рядов: сравнения, предельный признак сравнения, Даламбера, радикальный Коши, интегральный Коши;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

4. сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$;
5. знакочередующиеся ряды, признак Лейбница;
6. абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов;

7. мажорируемые ряды. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов;
8. непрерывность суммы, интегрируемость и дифференцируемость равномерно сходящихся рядов;
9. степенные ряды: интервал сходимости, теорема Абеля;
10. дифференцирование и интегрирование степенных рядов;
11. ряды Тейлора и Маклорена,
12. разложение в ряд Маклорена и область сходимости элементарных функций:
 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$;

Теория вероятностей и математическая статистика

1. Классическое и геометрическое определения вероятности. Свойства вероятности.
2. Виды случайных событий: совместные, несовместные, зависимые, независимые. Операции над случайными событиями.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности.
5. Вероятности гипотез. Формулы Байеса.
6. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
7. Теорема Пуассона.
8. Понятие случайной величины, способы задания случайных величин.
9. Биномиальное распределение, его числовые характеристики.
10. Геометрическое и гипергеометрическое распределения.
11. Операции над случайными величинами.
12. Свойства математического ожидания.
13. Формулы для вычисления дисперсии.
14. Свойства дисперсии.
15. Начальные и центральные теоретические моменты.
16. Закон больших чисел: неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.
17. Функция распределения, ее свойства.
18. Плотность распределения вероятностей, ее свойства.
19. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
20. Нормальное распределение: числовые характеристики, свойства, кривая Гаусса.
21. Равномерное, показательное распределения. Числовые характеристики.
22. Способы задания двумерной случайной величины.
23. Корреляционный момент двумерной случайной величины, свойства.
24. Коэффициент корреляции двумерной случайной величины, свойства.

Литература

Список рекомендуемой литературы

1. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.
2. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Список дополнительной литературы

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный.- 10-е изд., испр.- М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил.- (Высшее образование).
2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. В 2 ч. Часть 1. Теория вероятностей : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2016. — 264 с. — Серия: Бакалавр. Академический курс.

Составитель Грунина Мария Викторовна

МАТЕМАТИКА

Методические указания по проведению практических занятий

Печатается в авторской редакции

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова