ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Инженерный институт

ТЕОРИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Методические указания для практических занятий

НОВОСИБИРСК 2022

Кафедра сельскохозяйственных машин

УДК 004:519.86

Составители: П.С. Вагайцев

Рецензент: к.т.н. доцент С.Н. Бурков

Теория транспортных процессов и систем: методические указания для практических занятий / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: П.С. Вагайцев. – Новосибирск, 2022. – 32 с.

Предназначены для студентов Инженерного института НГАУ обучающихся по направлению подготовки 23.03.01 Технология транспортных процессов при проведении практических занятий по дисциплине «Теория транспортных процессов и систем».

Утверждены методическим советом Инженерного института (протокол №7 от 29 сентября 2022 г.).

© ФГБОУ Новосибирский государственный аграрный университет, 2022
© Инженерный институт, 2022

Оглавление

Занятие 1. Составление опорного плана перевозок с помощью методов северо-западного угла, наименьшего элемента и метода Фогеля

Задание

Предприятие по продаже пиломатериалов имеет три базы по лесозаготовке и пять пилорам. Известны квартальные производственные мощности каждой базы по лесозаготовке (таблица 4), и потребности пилорам в соответствии с их объёмами продаж конечной продукции потребителям (таблица 5). Зная тарифы на перевозку 1м^3 леса (таблица 6) необходимо составить опорные планы перевозок методами северо-западного угла, наименьшего элемента и методом Фогеля. Проверить составленные планы на вырожденность и после этого сделать вывод о наилучшем способе составления опорного плана перевозок.

Таблица 4 – Квартальные объёмы производства базами по лесозаготовке, м^3

Первая цифра порядкового номера в списке	База по лесозаготовке		
	A_1	A_2	A_3
0	1000	800	1200
1	750	750	1500
2	1100	1300	600

Таблица 5 – Квартальные объёмы потребления леса пилорамами, м^3.

Вторая цифра порядкового номера в списке	Пилорама				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
0	600	600	600	600	600
1	500	750	450	560	740
2	320	1000	600	570	510
3	500	750	500	750	500
4	475	775	550	800	400
5	600	750	1100	250	300
6	600	800	750	450	400
7	500	350	800	600	750
8	800	600	475	575	550
9	750	750	400	600	500

Таблица 6 – Стоимость перевозки 1м^3 леса от базы лесозаготовки к пилораме, тыс.руб.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1,5	2	1,75	3	2,5
A_2	4	6	10	7	5
A_3	2,5	3	2,75	2,25	0,85

Пример решения задания

1. **Диагональный метод,** или **метод северо-западного угла.** При этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется левая верхняя клетка (северо-западный угол) оставшейся части таблицы. При таком методе заполнение таблицы начинается с клетки неизвестного x_{11} и заканчивается в клетке неизвестного x_{mn}, т. е. идёт как бы по диагонали таблицы перевозок.

2. **Метод наименьшей стоимости.** При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первой заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них. *Замечание.* В диагональном методе не учитываются величины тарифов, в методе же наименьшей стоимости эти величины учитываются, и часто последний метод приводит к плану с меньшими общими затратами, хотя это и не обязательно.

3. **Метод Фогеля.** Суть его состоит в следующем: в распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Отмечается наибольшая разность. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчёт не принимаются. На каждом этапе загружается только одна клетка. Распределение груза производится, как и ранее. Рассмотрим каждый из этих методов.

Диагональный метод, или метод северо-западного угла

Заполнение таблицы начинается с её северо-западного угла, т. е. клетки с неизвестным x_{11}. Первая база A_1 может полностью удовлетворить потребность первого заказчика B_1 ($a_1 = 30$, $b_1 = 20$, $a_1 > b_1$). Полагая $x_{11} = 20$, вписываем это значение в клетку x_{11} и исключаем из рассмотрения первый столбец.

	B_1	B_2	B_3		
A_1	10 **20**	20	30	30	10
A_2	30	10	20	15	
A_3	5	15	10	25	
	20	5	45	70	
	0				

На базе A_1 остаётся изменённый запас $a' = 10$. В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и двумя столбцами B_2, B_3 северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{12}. Первая база с запасом $a'_1 = 10$ может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 ($a'_1 = 10$, $b_2 = 5$, $a'_1 > b_2$). Полагаем $x_{12} = 5$, вписываем это значение в клетку x_{12} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_1 остаётся новый остаток (запас) $a''_1 =5$.

	B_1	B_2	B_3		
A_1	10 **20**	20 **5**	30	30	5
A_2	30	10	20	15	
A_3	5	15	10	25	
	20	5	45	700	
	0	0			

В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и одним столбцом B_3 северо-западным углом будет клетка для неизвестного x_{13}. Теперь третий заказчик B_3 может принять весь запас с базы A_1 ($a''_1 = 5$, $b_3 = 45$, $a''_1 < b_3$). Полагаем $x_{13} = 5$, вписываем это значение в клетку x_{13} и исключаем из рассмотрения первую строку. У заказчика из B_3 осталась ещё не удовлетворённой потребность $b'_3 = 40$.

	B_1	B_2	B_3		
A_1	10 **20**	20 **5**	30 **5**	30	0
A_2	30	10	20	15	
A_3	5	15	10	25	
	20	5	45	70	
	0	0	40		

Теперь переходим к заполнению клеток для неизвестного x_{23} и x_{33}. Потребности B_3 будут полностью удовлетворены базами A_2, и A_3. Исключаем третий столбец.

	B$_1$	B$_2$	B$_3$		
A_1	10 **20**	20 **5**	30 **5**	30	0
A_2	30	10	20 **15**	15	0
A_3	5	15	10 **25**	25	0
	20	5	45	70	
	0	0	0		

План составлен. Базис образован неизвестными x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{33}. Правильность составленного плана легко проверить, подсчитав суммы чисел, стоящих в заполненных клетках по строкам и столбцам.

Общий объём перевозок в тонно-километрах для этого плана составит:

$$S_1 = 20 \cdot 10 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 30 + 15 \cdot 20 + 25 \cdot 10 = 1000.$$

Метод наименьшей стоимости

При этом методе на каждом шаге построения опорного плана первой заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

В данном случае заполнение таблицы начинается с клетки для неизвестного x_{31}, для которого мы имеем значение $c_{31} = 5$, наименьшее из всех значений c_{ij}. Эта клетка находится на пересечении третьей строки и первого столбца, соответствующем третьей базе A_3 и первому заказчику B_1. Третья база A_3 может полностью удовлетворить потребность первого заказчика B_1 ($a_3 = 25$, $b_1 = 20$, $a_3 > b_1$). Полагая $x_{31} = 20$, вписываем это значение в клетку x_{31} и исключаем из рассмотрения первый столбец. На базе A_3 остаётся изменённый запас $a'_3 = 5$.

	B$_1$	B$_2$	B$_3$		
A_1	10	20	30	30	
A_2	30	10	20	15	
A_3	5 **20**	15	10	25	5
	20	5	45	70	
	0				

В оставшейся новой таблице с тремя строками A_1, A_2, A_3 и двумя столбцами B_2, B_3 *имеются две клетки* с наименьшим значением c_{ij}, где $c_{22} = 10$ и $c_{33} = 10$. Выбираем (любую из них) клетку с $c_{22} = 10$. Вторая база A_2 может полностью удовлетворить потребность второго заказчика B_2 *(*$a_2 = 15$ $b_2 = 5$, $a_2 > b_2$. Полагая $x_{22} = 5$, вписываем это значение в клетку x_{22} и исключаем из рассмотрения второй столбец. На базе A_2 остается изменённый запас $a'_2 = 10$.

	B₁	B₂	B₃		
A_1	10	20	30	30	
A_2	30	10 **5**	20	15	10
A_3	5 **20**	15	10	25	5
	20	5	45	70	
	0	0			

Остался незаполненным один третий столбец. Его заполняем согласно имеющимся запасам на базах A_1, A_2, A_3. В результате получаем $x_{13} = 30$, $x_{23} = 10$, $x_{33} = 5$.

A_1	10	20	30 **30**	30	0
A_2	30	10 **5**	20 **10**	15	0
A_3	5 **20**	15	10 **5**	25	0
	20	5	45	70	
	0	0	0		

Общий объём перевозок в тонно-километрах для этого плана составит:

$S_1 = 20 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 30 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 10 = 1300.$

Замечание. В диагональном методе не учитываются величины тарифов, в методе же наименьшей стоимости эти величины учитываются, и часто последний метод приводит к плану с меньшими общими затратами (что не имеет места в нашем примере).

Метод Фогеля

Суть метода состоит в следующем: в распределительной таблице по строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. Отмечается наибольшая разность. Далее в строке (столбце) с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. Строки (столбцы) с нулевым остатком груза в дальнейшем в расчёт не принимаются. На каждом этапе заполняется только одна клетка. Для иллюстрации метода возьмём ту же начальную транспортную таблицу, что в методе наименьшей стоимости.

	B_1	B_2	B_3		разность
A_1	10	20	30	30	10
A_2	30	10	20	15	10
A_3	5	15	10	25	5
	20	5	45	70	
разность	5	5	10		

Три наибольшие разности оказались одинаковыми и равными 10. Выбираем столбец B_3 и заполняем клетку x_{33} с наименьшим тарифом 10 в этом столбце. Присвоим переменной x_{33} = 25. Запас на базе A_3 полностью использован потребителем B_3. Эта строчка исключается из расчёта.

	B_1	B_2	B_3			разность
A_1	10	20	30	30		10
A_2	30	10	20	15		10
A_3	5	15	10 **25**	25	0	5
	20	5	45	70		
			20			
разность	5	5	10			

Снова рассчитаем разности. Наибольшая разность получилась в столбце B_1, наименьший тариф в этом столбце – у переменной x_{11}. Присвоим ей значение x_{11} = 20. Спрос у базы B_1 полностью удовлетворён. Столбец B_1 исключаем из расчёта.

	B_1	B_2	B_3			разность
A$_1$	10 **20**	20	30	30	10	10
A$_2$	30	10	20	15		10
A$_3$	5	15	10 **25**	25	0	□
	20	5	45	70		
	0		20			
разность	20	10	10			

Снова рассчитаем разности. Из расчёта исключаем столбец B_1 и строку A_3. Все разности имеют одинаковое значение 10. В столбце B_2 у переменной x_{22} наименьший тариф. Присвоим ей значение x_{22} = 5. Спрос у базы B_2 полностью удовлетворён. Столбец B_2 исключаем из расчёта.

	B_1	B_2	B_3			разность
A_1	10 **20**	20	30	30	10	10
A_2	30	10 **5**	20	15	10	10
A_3	5	15	10 **25**	25	0	□
	20	5	45	70		
	0	0	20			
разность	□	10	10			

Остались незаполненными две клетки. Присваиваем переменной x_{13} = 10 *(остаток неиспользованного запаса на A_1)*. Присваиваем переменной x_{23} = 10 *(остаток запаса на A_2)*.

	B_1	B_2	B_3			разность
A_1	10 **20**	20	30 **10**	30	0	10
A_2	30	10 **5**	20 **10**	15	0	10
A_3	5	15	10 **25**	25	0	□
	20	5	45	70		
	0	0	0			
разность	□	10	10			

Все базисные переменные в количестве пяти определены. Опорный план сформирован.

Общий объём перевозок в тонно-километрах для этого плана составит:

$$S_1 = 20 \cdot 10 + 5 \cdot 10 + 10 \cdot 30 + 10 \cdot 20 + 25 \cdot 10 = 1000.$$

Результаты вычислений всех методов

Метод северо-западного угла:

S = 1000 тонно-километров.

Метод наименьшей стоимости:

S = 1300 тонно-километров.

Метод Фогеля:

S = 1000 тонно-километров.

Анализируя полученные нами результаты, можно прийти к выводу, метод северо-западного угла и метод Фогеля показали одинаково близкое приближение к оптимальному плану перевозок. Вместе с тем следует заметить, что в большинстве случаев метод северо-западного угла показывает худшее приближение к оптимальному решению, чем все рассмотренные методы. Данный пример взят для демонстрации неочевидности эффективности приближения к оптимальному решению у методов составления начального опорного плана.

При использовании метода Фогеля время расчёта больше, чем у двух выше рассмотренных. Это вызвано тем, что на каждом шаге приходится заново искать разности между минимальными элементами в строках и столбцах. Однако это время компенсируется при дальнейшем поиске оптимального решения по методу потенциалов. Уменьшение количества дальнейших расчётов обусловлено тем, что метод Фогеля, как правило, даёт не только начальное опорное решение, но и оптимальное решение. Метод потенциалов в этом случае нужен фактически только для подтверждения, что получено действительно оптимальное решение. По этой причине метод Фогеля наиболее предпочтителен для решения транспортной задачи.

Занятие 2. Решение закрытой транспортной задачи методом потенциалов

Задание

Используя данные составленного опорного плана по условиям задачи второго занятия необходимо решить транспортную задачу используя метод потенциалов и сделать выводы о стоимости перевозок и плане поставок леса от баз по заготовке леса к пилорамам.

Пример выполнения задания

1	500	900	700	600	400	900	Остатки
1500	1 500	4 -	5 100	4,5 600	2 -	2,5 300	0
1000	1,5 -	5 -	6 -	3 -	1,5 400	2 600	0
1500	3 -	2,5 900	8,5 600	6 -	3 -	4,5 -	0
Остатки	0	0	0	0	0	0	

Методом потенциалов оптимальный план будем находить пошагово. На каждом шаге метода осуществляем переход от одного опорного плана к другому, выполняя следующие действия:

1. Вычислим потенциалы поставщиков и потребителей.
2. Вычислим косвенные издержки для свободных клеток.
3. Проверим признак оптимальности плана.
4. Одну из свободных клеток выбираем для перераспределения автомобилей.
5. Для выбранной клетки строим цикл перераспределения автомобилей.
6. Пометим клетки цикла знаками «+» и «-».
7. Определим объём перераспределения автомобилей.
8. Строим новый опорный план.

1) Вычислим потенциалы.

Произвольно задаём значение одного из потенциалов, например, положим значение потенциала для третьего поставщика u_3 равным нулю.

2а	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	1 500	4 -	5 100	4,5 600	2 -	2,5 300	
1000	1,5 -	5 -	6 -	3 -	1,5 400	2 600	
1500	3 -	2,5 900	8,5 600	6 -	3 -	4,5 -	0
v_j		2,5	8,5				

Рассмотрим третью строку. В ней ищем нерассмотренные заполненные и условно заполненные клетки. Такие клетки есть, это клетки $(3;2)$ и $(3;3)$.

По этим клеткам определяем потенциал второго и третьего дилерских центров: $v_2 = u_3 + c_{32} = 0 + 2,5 = 2,5$ и $v_3 = u_3 + c_{33} = 0 + 8,5 = 8,5$.

Больше нерассмотренных и заполненных и условно заполненных клеток в третьей строке нет. Переходим к вычисленному потенциалу v_2. Это потенциал второго потребителя. Рассмотрим второй столбец. Так как в этом столбце нет больше заполненных клеток, поэтому через этот потенциал вычислить другие потенциалы нет возможности, поэтому перейдём к следующему потенциалу. Это потенциал третьего потребителя $v_3 = 8,5$. Рассмотрим третий столбец. В этом столбце есть заполненная клетка $(1;3)$. По этой клетке определяем потенциал первого поставищика: $u_1 = v_3 - c_{13} = 8,5 - 5 = 3,5$. Больше нерассмотренных заполненных и условно заполненных клеток в третьем столбце нет, поэтому переходим к следующему шагу.

2б	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	^{1} 500	^{4} -	^{5} 100	^{4,5} 600	^{2} -	^{2,5} 300	3,5
1000	^{1,5} -	^{5} -	^{6} -	^{3} -	^{1,5} 400	^{2} 600	
1500	^{3} -	^{2,5} 900	^{8,5} 600	^{6} -	^{3} -	^{4,5} -	0
v_j		2,5	8,5				

Следующим шагом рассмотрим первую строку и нерассмотренные в ней клетки. Такие клетки есть, это клетки $(1;1)$, $(1;4)$ и $(1;6)$.

2в	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	^{1} 500	^{4} -	^{5} 100	^{4,5} 600	^{2} -	^{2,5} 300	3,5
1000	^{1,5} -	^{5} -	^{6} -	^{3} -	^{1,5} 400	^{2} 600	
1500	^{3} -	^{2,5} 900	^{8,5} 600	^{6} -	^{3} -	^{4,5} -	0
v_j	4,5	2,5	8,5	8		6	

По этим клеткам определим потенциалы соответственно первого, четвёртого и шестого потребителей. Их потенциалы будут соответственно: $v_1 = u_1 + c_{11} = 3,5 + 1 = 4,5$, $v_4 = u_1 + c_{14} = 3,5 + 4,5 = 8$ и $v_6 = u_1 + c_{16} = 3,5 + 2,5 = 6$

Переходим к следующему шагу. По полученному потенциалу v_6 определим потенциал второго поставщика $u_2 = v_6 - c_{26} = 6 - 2 = 4$

2г	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	^{1} 500	^{4} -	^{5} 100	^{4,5} 600	^{2} -	^{2,5} 300	3,5
1000	^{1,5} -	^{5} -	^{6} -	^{3} -	^{1,5} 400	^{2} 600	4
1500	^{3} -	^{2,5} 900	^{8,5} 600	^{6} -	^{3} -	^{4,5} -	0
v_j	4,5	2,5	8,5	8		6	

Переходим к следующему шагу. По известному потенциалу второго поставщика определим потенциал пятого потребителя $v_5 = u_2 + c_{25} = 4 + 1,5 = 5,5$

2д	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	^{1} 500	^{4} -	^{5} 100	^{4,5} 600	^{2} -	^{2,5} 300	3,5
1000	^{1,5} -	^{5} -	^{6} -	^{3} -	^{1,5} 400	^{2} 600	4
1500	^{3} -	^{2,5} 900	^{8,5} 600	^{6} -	^{3} -	^{4,5} -	0
v_j	4,5	2,5	8,5	8	5,5	6	

Все потенциалы поставщиков и потребителей вычислены, поэтому переходим к выполнению следующего шага метода потенциалов.

2) Вычислим косвенные издержки свободных клеток, которые обозначим Δ_{ij}. Косвенные издержки свободных клеток вычисляем по формуле: $\Delta_{ij} = c_{ij} - (v_j - u_i)$.

$\Delta_{12} = 4 - (2,5 - 3,5) = 3;$ $\Delta_{15} = 2 - (5,5 - 3,5) = 0;$ $\Delta_{21} = 1,5 - (4,5 - 4) = 1;$
$\Delta_{22} = 5 - (2,5 - 4) = 3,5;$ $\Delta_{23} = 6 - (8,5 - 4) = 1,5;$ $\Delta_{24} = 3 - (8 - 4) = -1;$
$\Delta_{31} = 3 - (4,5 - 0) = -1,5;$ $\Delta_{34} = 6 - (8 - 0) = -2;$ $\Delta_{35} = 3 - (5,5 - 0) = -2,5;$
$\Delta_{36} = 4,5 - (6 - 0) = -1,5.$

3) Проверяем признак оптимальности плана: если для всех свободных клеток косвенные издержки положительные $\Delta_{ij} \geq 0$, то опорный план является оптимальным.

План не оптимальный, так как $\Delta_{24} < 0$, $\Delta_{31} < 0$, $\Delta_{34} < 0$, $\Delta_{35} < 0$, $\Delta_{36} < 0$.

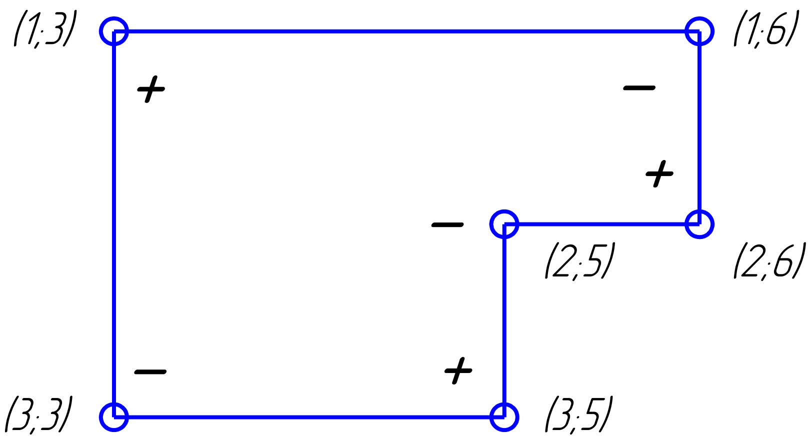
Вычислим, для проверки суммарные затраты на перевозку при данном плане

$$Z_1 = 1 \cdot 500 + 2,5 \cdot 900 + 5 \cdot 100 + 8,5 \cdot 600 + 4,5 \cdot 600 + 1,5 \cdot 400 + 2,5 \cdot 300 + 2 \cdot 600 =$$
$$= 13600 \textit{тыс.руб}.$$

4) Выбираем клетку для перераспределения. Это одна из клеток таблицы, для которой косвенные издержки строго отрицательные. Выбираем клетку $(3;5)$

2е	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	1 500	4 -	5 100	4,5 600	2 -	2,5 300	3,5
1000	1,5 -	5 -	6 -	3 -	1,5 400	2 600	4
1500	3 -	2,5 900	8,5 600	6 -	3 -	4,5 -	0
v_j	4,5	2,5	8,5	8	5,5	6	

5) Для выбранной клетки $(3;5)$ строим цикл перераспределения автомобилей.



Выбранную свободную клетку включаем в цикл. Далее рассматриваем столбец, содержащий выбранную клетку, это столбец 5. Ищем в этом столбце заполненные и условно заполненные клетки. Такие клетки есть, это клетка $(2;5)$. Так как эта клетка является единственной, то её включаем в цикл и переходим к ней. Рассматриваем строку, содержащую клетку $(2;5)$, в ней кроме выбранной клетки есть заполненная клетка $(2;6)$. Так как она единственная, то её включаем в цикл и переходим к ней. Рассмотрим шестой столбец. Кроме ячейки $(2;6)$ в данном столбце есть ещё одна заполненная клетка $(1;6)$, так как она одна, то включаем её в цикл и переходим к ней. Рассмотрим строку 1, в ней есть заполненные ячейки $(1;1)$, $(1;3)$ и $(1;4)$. Так как в столбцах 1 и 4 кроме уже отмеченных ячеек $(1;1)$ и $(1;4)$ больше нет заполненных ячеек, то их мы не можем включить в цикл, поэтому переходим к ячейке $(1;3)$ и рассматриваем третий столбец. Кроме ячейки $(1;3)$ в данном столбце есть заполненная ячейка $(3;3)$ которую мы также включаем в цикл. При этом наш цикл замыкается.

6) Пометим клетки цикла знаками «+» и «-». Помечать клетки цикла начнём со свободной клетки цикла, клетки $(3;5)$. Её пометим знаком «+». Далее, двигаясь по циклу в направлении его построения, помечаем остальные клетки цикла, чередуя знаки. В клетки, помеченные знаком «+», автомобили будем добавлять, а из клеток, помеченных знаком «-», автомобили будем забирать.

7) Определим объём перераспределения груза. Объём перераспределения груза ΔV равняется наименьшему из объёмов отрицательных ячеек цикла. Минимальной является ячейка $(1;6)$ объём которой равен 300 единиц груза.

8) Строим новый опорный план. Сначала для клеток цикла пересчитаем объёмы автомобилей: для клетки $(3;5)$ новый объём будет равен: $x_{35} = 0 + 300 = 300$, для клетки $(2;5)$ $x_{25} = 400 - 300 = 100$ и так далее.

3а	500	900	700	600	400	900
1500	1 500	4 -	5 400	4,5 600	2 -	2,5 0
1000	1,5 -	5 -	6 -	3 -	1,5 100	2 900
1500	3 -	2,5 900	8,5 300	6 -	3 300	4,5 -

Переходим к новому опорному плану и для него применяем метод потенциалов.

1) Вычислим потенциалы потребителей и поставщиков

3б	500	900	700	600	400	900	u_i
1500	1 500	4 -	5 400	4,5 600	2 -	2,5 -	3,5
1000	1,5 -	5 -	6 -	3 -	1,5 100	2 900	1,5
1500	3 -	2,5 900	8,5 300	6 -	3 300	4,5 -	0
v_j	4,5	2,5	8,5	8	3	3,5	

2) Вычислим косвенные издержки свободных клеток.

$\Delta_{12} = 4 - (2,5 - 3,5) = 3;$ $\Delta_{15} = 2 - (3 - 3,5) = 1,5;$ $\Delta_{16} = 2,5 - (3,5 - 3,5) = 2,5;$

$\Delta_{21} = 1,5 - (4,5 - 1,5) = -1,5;$ $\Delta_{22} = 5 - (2,5 - 1,5) = 4;$ $\Delta_{23} = 6 - (8,5 - 1,5) = -1;$

$\Delta_{24} = 3-(8-1,5) = -3,5;$ $\Delta_{31} = 3-(4,5-0) = -1,5;$ $\Delta_{34} = 6-(8-0) = -2;$ $\Delta_{36} = 4,5-(3,5-0) = 1.$

3) План не оптимальный, так как $\Delta_{24} < 0$, $\Delta_{31} < 0$, $\Delta_{34} < 0$, $\Delta_{35} < 0$, $\Delta_{36} < 0$.

$$Z_2 = 1\cdot 500 + 2,5\cdot 900 + 5\cdot 400 + 8,5\cdot 300 + 4,5\cdot 600 + 1,5\cdot 100 + 3\cdot 300 + 2\cdot 900 =$$
$$= 12850 \textit{тыс.руб.}$$

Далее аналогичным образом план улучшается пока не получатся все косвенные издержки неотрицательными

Занятие 3. Приведение открытой транспортной задачи к закрытой и её решение с помощью метода потенциалов

Задание

Согласно двум цифрам порядкового номера студента из списка, определить тип открытой задачи, привести её к закрытому типу, составить опорный план перевозок любым из рассмотренных способов и решить задачу методом потенциалов

1. $a_1 = 18, a_2 = 34, a_3 = 18,$

$b_1 = 30, b_2 = 13, b_3 = 11, b_4 = 37,$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. $a_1 = 4, a_2 = 23, a_3 = 13,$

$b_1 = 14, b_2 = 27, b_3 = 4, b_4 = 13,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. $a_1 = 19, a_2 = 15, a_3 = 35, a_4 = 21,$

$b_1 = 24, b_2 = 15, b_3 = 27,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

4. $a_1 = 7, a_2 = 9, a_3 = 7,$

$b_1 = 8, b_2 = 19, b_3 = 11, b_4 = 19,$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. $a_1 = 17, a_2 = 12, a_3 = 7, a_4 = 23,$

$b_1 = 12, b_2 = 17, b_3 = 2,$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. $a_1 = 17, a_2 = 26, a_3 = 14, a_4 = 6,$

$b_1 = 7, b_2 = 22, b_3 = 14,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. $a_1 = 12, a_2 = 3, a_3 = 24, a_4 = 30,$

$b_1 = 17, b_2 = 12, b_3 = 17,$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

8. $a_1 = 29, a_2 = 18, a_3 = 19,$

$b_1 = 31, b_2 = 25, b_3 = 2, b_4 = 23,$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. $a_1 = 7, a_2 = 16, a_3 = 23, a_4 = 20,$

$b_1 = 32, b_2 = 14, b_3 = 32,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

10. $a_1 = 12, a_2 = 19, a_3 = 45,$

$b_1 = 30, b_2 = 5, b_3 = 33, b_4 = 26,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

11. $a_1 = 9, a_2 = 25, a_3 = 12,$

$b_1 = 20, b_2 = 4, b_3 = 18, b_4 = 16,$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

12. $a_1 = 34, a_2 = 7, a_3 = 29,$

$b_1 = 12, b_2 = 26, b_3 = 16, b_4 = 39,$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

13. $a_1 = 12, a_2 = 44, a_3 = 1,$

$b_1 = 12, b_2 = 22, b_3 = 16, b_4 = 10,$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

14. $a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 14,$

$b_1 = 6, b_2 = 14, b_3 = 14, b_4 = 10,$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

15. $a_1 = 28, a_2 = 43, a_3 = 9,$

$b_1 = 17, b_2 = 31, b_3 = 16, b_4 = 17,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

16. $a_1 = 6, a_2 = 11, a_3 = 33, a_4 = 23,$

$b_1 = 7, b_2 = 13, b_3 = 18,$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

17. $a_1 = 17, a_2 = 24, a_3 = 8,$

$b_1 = 10, b_2 = 22, b_3 = 14, b_4 = 12,$

18. $a_1 = 20, a_2 = 8, a_3 = 6,$

$b_1 = 8, b_2 = 34, b_3 = 6, b_4 = 4,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

19. $a_1 = 12, a_2 = 12, a_3 = 25, a_4 = 21,$

$b_1 = 16, b_2 = 18, b_3 = 30,$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

20. $a_1 = 21, a_2 = 20, a_3 = 2,$

$b_1 = 5, b_2 = 37, b_3 = 18, b_4 = 1,$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Занятие 4. Решение транспортных задач в среде MS Excel

Задание

Используя исходные данные четвёртого занятия выполнить следующие действия:

1. Открыть Excel и выполнить операции по созданию табличной модели:

- сформировать на рабочем листе таблицу **Стоимость перевозки одной единицы груза**. Занести в нее данные о стоимости перевозки единицы груза от *i*-го поставщика *j*-му потребителю $\mathbf{c_{ij}}$;
- сформировать на рабочем листе **Таблицу-план оптимального закрепления**. Занести в нее ограничения по предложению для каждого поставщика S_i и по спросу для каждого потребителя D_j;
- занести в одну из ячеек целевую функцию **=СУММПРОИЗВ(*c₁₁*:*cₘₙ*;*x₁₁*:*xₘₙ*)**.

2. Оптимизировать модель, выбрав команду **Поиск решения** в меню **Данные**.
3. В открывшемся диалоговом окне **Поиск решения** указать данные, необходимые для процесса оптимизации, и нажать кнопку **Выполнить**.
4. Сохранить отчет о выполненной работе, указав в качестве имени файла № группы и фамилию студента, выполнившего работу.

Пример выполнения задания

Детройте и Новом Орлеане и два распределительных центра в Денвере и Майами. Объемы производства заводов компании в следующем квартале составят соответственно 1000, 1500 и 1200 автомобилей. Ежеквартальная потребность распределительных центров составляет 2300 и 1400 автомобилей.

Расстояние (в милях) между заводами и распределительными центрами приведены в таблице 1.

Таблица 1

Поставщики	**Потребители**	
	Денвер	**Майами**
Лос-Анджелес	1000	2690
Детройт	1250	1350
Новый Орлеан	1275	850

Транспортная компания оценивает свои услуги в 8 центов за перевозку одного автомобиля на одну милю. В результате получаем, представленную в табл. 2.2, стоимость перевозок (с округлением до доллара) по каждому маршруту.

Таблица 2

Поставщики	**Потребители**	
	Денвер	**Майами**
Лос-Анджелес	\$80	\$215
Детройт	\$100	\$108
Новый Орлеан	\$102	\$68

Основываясь на данных из табл. 2 формулируем следующую задачу линейного программирования.

Минимизировать

$F=80x_{11}+215x_{12}+100x_{21}+108x_{22}+102x_{31}+68x_{32}\Rightarrow min$

при ограничениях

$x_{11}+x_{12}=1000$ (Лос-Анджелес),

$x_{21}+x_{22}=1500$ (Детройт),

$x_{31}+x_{32}=1200$ (Новый Орлеан),

$x_{11}+x_{21}+x_{31}=2300$ (Денвер),

$x_{12}+x_{22}+x_{32}=1400$ (Майами),

$x_{ij}\geq 0$, $i=1,2,3$, $j=1,2$.

Эти ограничения выражены в виде равенств, поскольку общий объем произведенных автомобилей (S=1000+1500+1200= =3700) равен суммарному спросу распределительных центров (D=2300+1400=3700).

Данную задачу можно решить симплекс-методом или с помощью так называемой ***транспортной таблицы***. Решение данной задачи в Excel представлено на рис. 1 -2

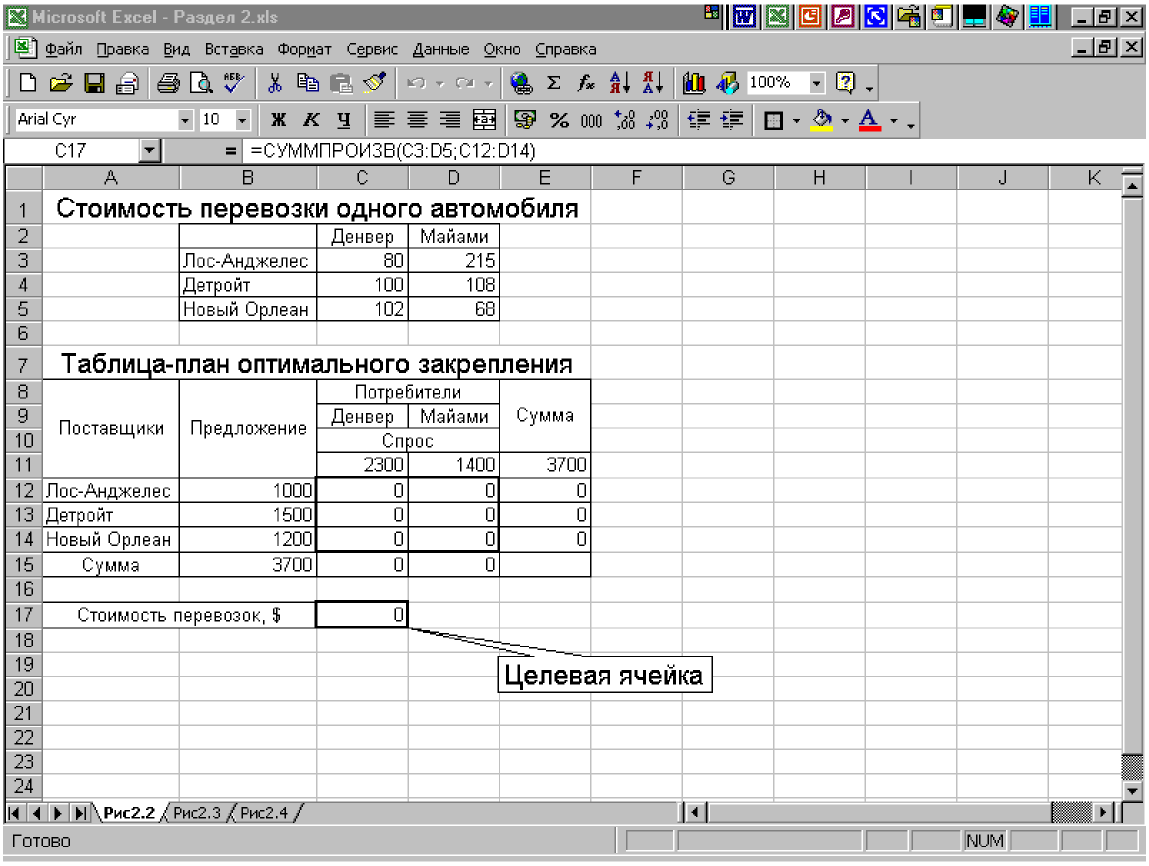


Рисунок 1

Исходные данные для решения классической транспортной задачи целесообразно представить в виде двух таблиц (см. рис.-1), в первой из которых представлены значения стоимости перевозок единицы товара c_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю. Во второй таблице представлены: значения S_i предложения каждого i-го поставщика; значения D_j спроса каждого j-го потребителя; переменные x_{ij}, первоначально принимающие нулевые значения; вспомогательная строка и вспомогательный столбец "Сумма". Целевая ячейка C17 должна содержать формулу, выражающую целевую функцию:

=СУММПРОИЗВ(C3:D6;C12:D14).

Используя меню **Сервис⇒Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** (см. рис. 2.2-2), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке **Выполнить**.

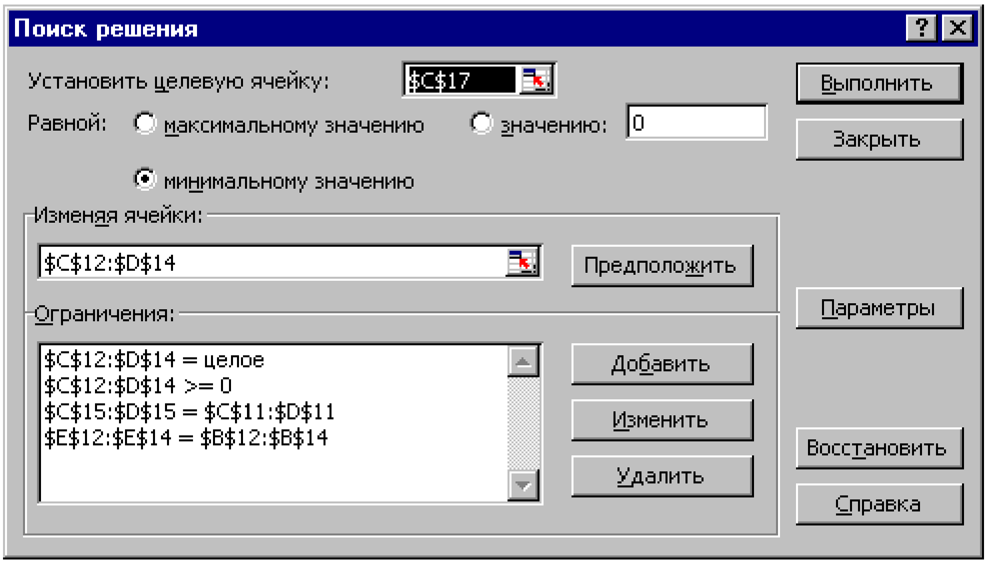


Рисунок 2.

Оптимальное решение данной задачи представлено на рис. 2.. Оно предполагает перевозку 1000 автомобилей из Лос-Анджелеса в Детройт, 1300 автомобилей - из Детройта в Денвер, 200 автомобилей - из Детройта в Майами и 1200 - из Нового Орлеана в Майами. Минимальная стоимость перевозок составляет 313200 долларов.

Занятие 5. Решение задач о назначении венгерским методом

Задание №1.

Транспортное предприятие располагает тремя автомобилями различных марок с различными транспортными издержками. На это предприятие поступил заказ на перевозку пяти различных грузов. Распределить грузы между автомобилями таким образом, чтобы суммарные затраты на перевозку были минимальными. Затраты на перевозку каждого груза каждым автомобилем (тыс.руб.) даны в матричной форме. Необходимо распределить грузы таким образом, чтобы транспортное предприятие понесло наименьшие транспортные издержки.

1. $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 & 9 & 5 \\ 11 & 2 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 5 & 12 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 21 & 14 & 17 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 21 \\ 19 & 16 & 26 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$

3. $C = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 7 & 11 & 16 \\ 4 & 14 & 12 & 15 & 17 \\ 15 & 22 & 12 & 11 & 19 \end{pmatrix}.$

4. $C = \begin{pmatrix} 28 & 12 & 7 & 18 & 7 \\ 35 & 14 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 13 \end{pmatrix}.$

5. $C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 7 \\ 15 & 35 & 12 & 11 & 6 \\ 16 & 19 & 32 & 15 & 25 \end{pmatrix}.$

6. $C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 21 & 10 & 15 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 21 \\ 19 & 16 & 22 & 17 & 20 \end{pmatrix}.$

7. $C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 5 & 11 & 17 \\ 14 & 5 & 12 & 14 & 22 \\ 20 & 15 & 12 & 18 & 21 \end{pmatrix}.$

8. $C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 4 & 9 & 4 \\ 17 & 10 & 9 & 11 & 5 \\ 15 & 11 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$

9. $C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$

10. $C = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 18 & 19 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 3 \\ 24 & 25 & 10 & 18 & 11 \end{pmatrix}$

Задание №2.

При тех же транспортных издержках известно, что за доставку этих грузов предприятие получит вознаграждение в размере 37, 42, 36, 27 и 32 тыс. руб. Необходимо распределить грузы таким образом, чтобы предприятие получило максимальную прибыль.

Занятие 6. Решение задач о назначениях в среде MS Excel

Задание

Автотранспортная компания располагает 10 автомобилями разных марок: 3 автомобиля марки A; 3 автомобиля марки B; 2 автомобиля марки C; 1 автомобиль марки D; 1 автомобиль марки E. Автомобили разных марок имеют разную грузоподъёмность q_i (m) и разные удельные эксплуатационные затраты c_i (*$/км*). Компания получила заказы от m клиентов на перевозку грузов. Причём в каждом заказе указан объём перевозимого груза Q_j (m) и расстояние перевозки $\boldsymbol{L}_j$ (*км*). Требуется, используя табличный процессор Excel, оптимальным образом назначить автомобили на рейсы для выполнения заказов клиентов, полагая тарифы на перевозки одинаковыми.

Характеристики автомобилей представлены в таблице 7.

Таблица 7 - Характеристики транспортных средств предприятия

Первая цифра в списке	Характеристики		Марка автомобиля				
			A	B	C	D	E
0	Грузоподъёмность, *т*	q_i	20	16	8	5	2,5
	Удельные затраты, *$/км*	c_i	0,8	0,55	0,35	0,25	0,13
1	Грузоподъёмность, *т*	q_i	10	12	18	20	16
	Удельные затраты, *$/км*	c_i	0,5	0,75	0,8	0,82	0,76
2	Грузоподъёмность, *т*	q_i	12	14	10	16	8
	Удельные затраты, *$/км*	c_i	0,65	0,7	0,48	0,68	0,4

Компанией

получены заказы от 9 клиентов. Характеристики заказов представлены в таблице 8.

Таблица 8 – Характеристики полученных заказов на перевозку грузов

№	**Характеристики**	**Клиенты**								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	Q_j, *т*	55	45	75	125	10	15	35	25	65
	L_j, *км*	25	75	125	50	40	70	60	20	10
2	Q_j, *т*	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, *км*	12	24	36	55	17	20	30	15	40
3	Q_j, *т*	50	300	30	25	100	75	50	10	40
	L_j, *км*	40	32	45	65	20	15	100	44	18
4	Q_j, *т*	10	50	40	90	10	25	40	5	70
	L_j, *км*	50	60	70	18	20	10	12	25	28
5	Q_j, *т*	45	55	175	25	100	35	15	65	25
	L_j, *км*	40	32	45	65	20	15	100	44	18
6	Q_j, *т*	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, *км*	12	24	36	55	17	20	30	15	40
7	Q_j, *т*	5	35	30	25	100	75	50	10	40
	L_j, *км*	25	75	125	50	40	70	60	20	10
8	Q_j, *т*	100	35	45	95	15	125	35	5	50
	L_j, *км*	50	60	70	18	20	10	12	25	28
9	Q_j, *т*	65	25	35	15	10	125	35	25	65
	L_j, *км*	14	22	35	10	44	19	27	40	50
0	Q_j, *т*	90	45	20	120	10	50	80	55	10
	L_j, *км*	62	23	74	14	54	20	30	15	25

Пример выполнения задания

Количество рейсов *i*-го автомобиля у *j*-го клиента вычисляется по формуле

$$z_{ij} = \frac{Q_j}{q_i}, \text{ для всех } i=1,2,\ldots k;\ j=1,2,\ldots k.$$

Количество рейсов - величина целочисленная, принимающая значение большее или равное 1. Для её вычисления следует воспользоваться функцией округления частного от деления в большую сторону. Например, если исходные данные находятся в ячейках B7:C7 и D4:D5, то количество рейсов определяется функцией (второй параметр функции округления равен 0):

= ОКРУГЛВВЕРХ($B7/D$5;0).

Пробег i-го автомобиля у j-го клиента вычисляется по формуле

$$R_{ij} = z_{ij} \times L_j.$$

Эксплуатационные затраты вычисляются по формуле

$$S_{ij} = R_{ij} \times c_i = z_{ij} \times L_j \times c_i,$$

где c_i – удельные эксплуатационные затраты, связанные с назначением i-го автомобиля для обслуживания j-го клиента, т.е. для приведенного выше примера в ячейку D7 необходимо занести формулу

= ОКРУГЛВВЕРХ($B7/D$5;0)*$C7*D$4.

Дополнительная целочисленная переменная логического типа принимает значения

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{при назначении} \\ 0, & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Целевая функция имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} S_{ij} \times x_{ij} \to \min,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ij} = 1; \qquad \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = 1; \qquad x_{ij} \geq 0$$ целое для всех $i,j = 1,2,\dots k$.

Найдем решение задачи 2.4 в Excel, используя следующие исходные данные.

Автотранспортная компания располагает 10 автомобилями разных марок: 3 автомобиля марки A; 3 автомобиля марки B; 2 автомобиля марки C; 1 автомобиль марки D; 1 автомобиль марки E.

Характеристики автомобилей представлены в табл. 1.

Таблица 1

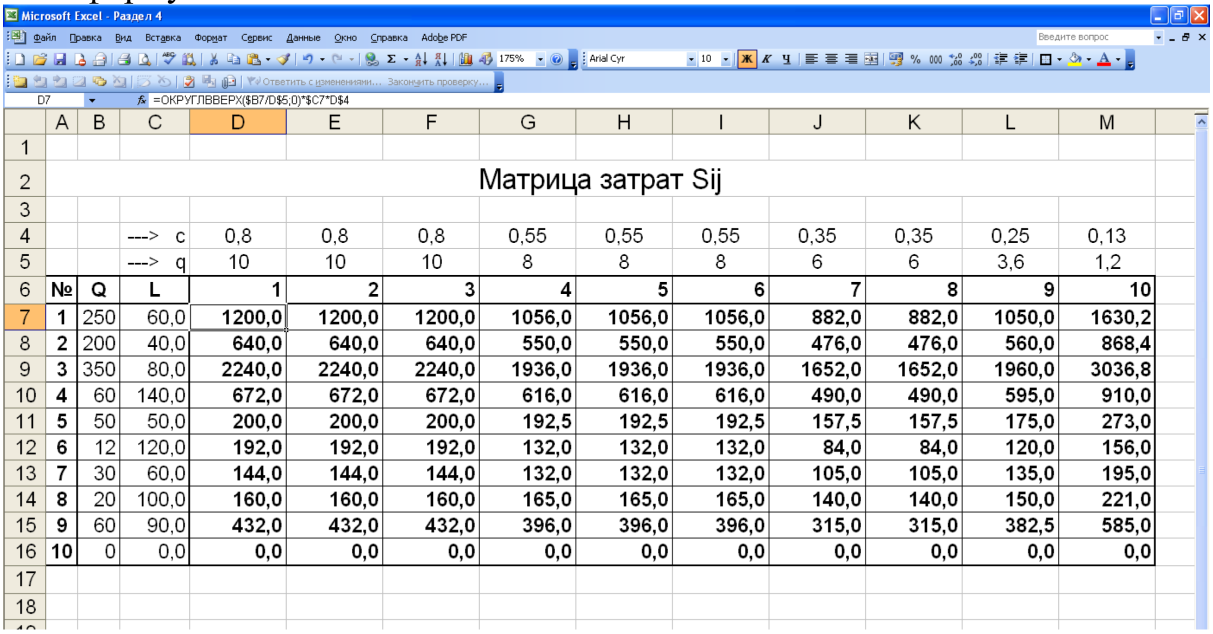
Характеристики		Марка автомобиля				
		A	B	C	D	E
Грузоподъёмность, *т*	q_i	20	16	8	5	2,5
Удельные затраты, *$/км*	c_i	0,8	0,55	0,35	0,25	0,13

Компанией получены заказы от 9 клиентов. Характеристики заказов представлены в табл. 2.

Таблица 2

Характеристики		Клиенты								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Объём груза, *т*	Q_j	250	200	350	69	50	12	30	20	60
Расстояние, *км*	L_j	60	40	80	140	50	120	60	100	90

На рис. 1 представлена таблица с исходными данными. Поскольку заказов меньше имеющихся у компании автомобилей, необходимо ввести фиктивного клиента с нулевым объёмом перевозок. В той же таблице произвести необходимые промежуточные расчёты затрат по приведённым выше формулам.

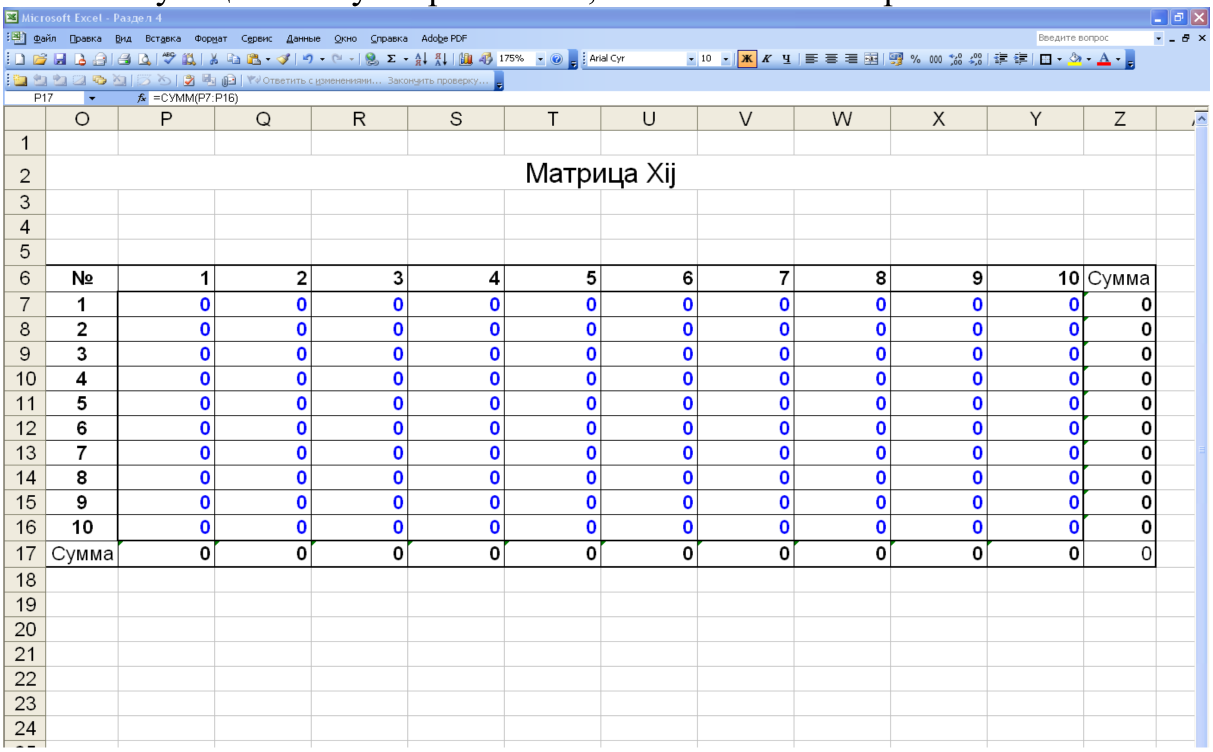


Матрица затрат Sij

		---> c	0,8	0,8	0,8	0,55	0,55	0,55	0,35	0,35	0,25	0,13
		---> q	10	10	10	8	8	8	6	6	3,6	1,2
№	Q	L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	250	60,0	1200,0	1200,0	1200,0	1056,0	1056,0	1056,0	882,0	882,0	1050,0	1630,2
2	200	40,0	640,0	640,0	640,0	550,0	550,0	550,0	476,0	476,0	560,0	868,4
3	350	80,0	2240,0	2240,0	2240,0	1936,0	1936,0	1936,0	1652,0	1652,0	1960,0	3036,8
4	60	140,0	672,0	672,0	672,0	616,0	616,0	616,0	490,0	490,0	595,0	910,0
5	50	50,0	200,0	200,0	200,0	192,5	192,5	192,5	157,5	157,5	175,0	273,0
6	12	120,0	192,0	192,0	192,0	132,0	132,0	132,0	84,0	84,0	120,0	156,0
7	30	60,0	144,0	144,0	144,0	132,0	132,0	132,0	105,0	105,0	135,0	195,0
8	20	100,0	160,0	160,0	160,0	165,0	165,0	165,0	140,0	140,0	150,0	221,0
9	60	90,0	432,0	432,0	432,0	396,0	396,0	396,0	315,0	315,0	382,5	585,0
10	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Рисунок 1

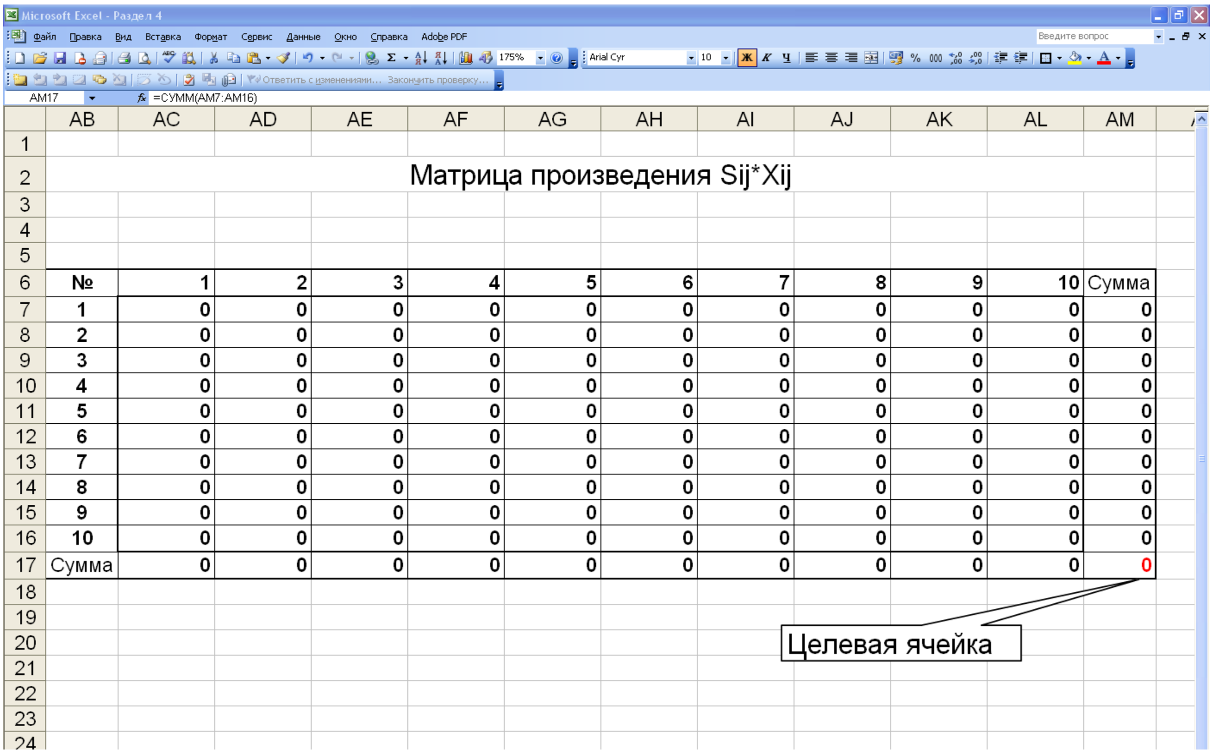
На рис. 2 и 3 представлены **Матрица X$_{ij}$**, содержащая переменные логического типа x_{ij} и **Матрица произведения S$_{ij}$*X$_{ij}$**, в которой отразится результат оптимального закрепления автомобилей за клиентами и, соответствующие этому закреплению, минимальные затраты.



Матрица Xij

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 2



Матрица произведения Sij*Xij

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 3

Используя меню **Сервис⇒Поиск решения** открываем диалоговое окно **Поиск решения** (см. рис. 2.9-1), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек со значениями логической переменной x_{ij} (**Матрица X**$_{ij}$) и ограничения, и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке **Выполнить**.

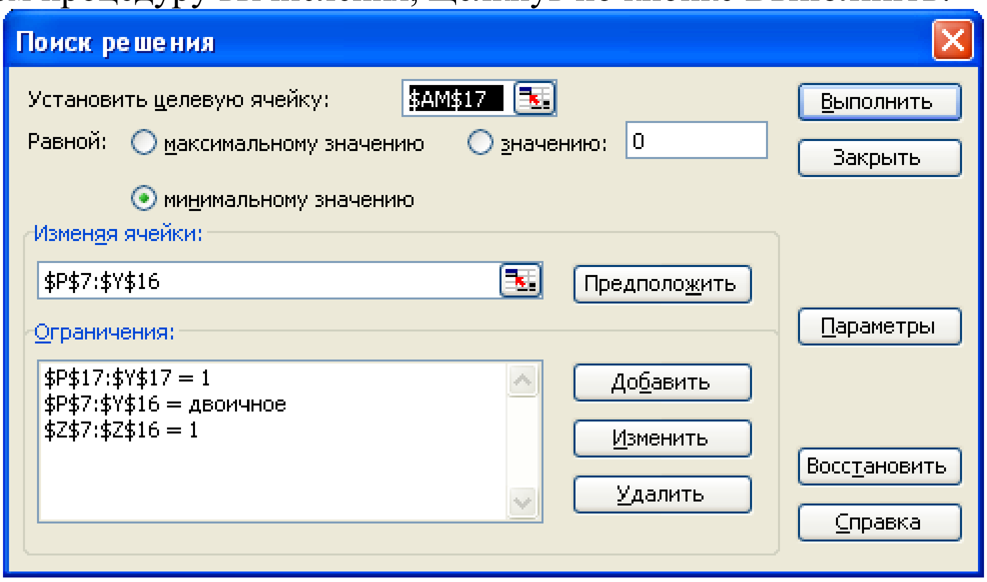


Рисунок 4

Результат поиска будет находиться в изменяемых ячейках **Матрицы X**$_{ij}$ (i - автомобиль; j - клиент) (см. рис. 5). Здесь мы видим, что оптимальный план назначения автомобилей на рейсы следующий:

первый автомобиль назначен на выполнение восьмого заказа;

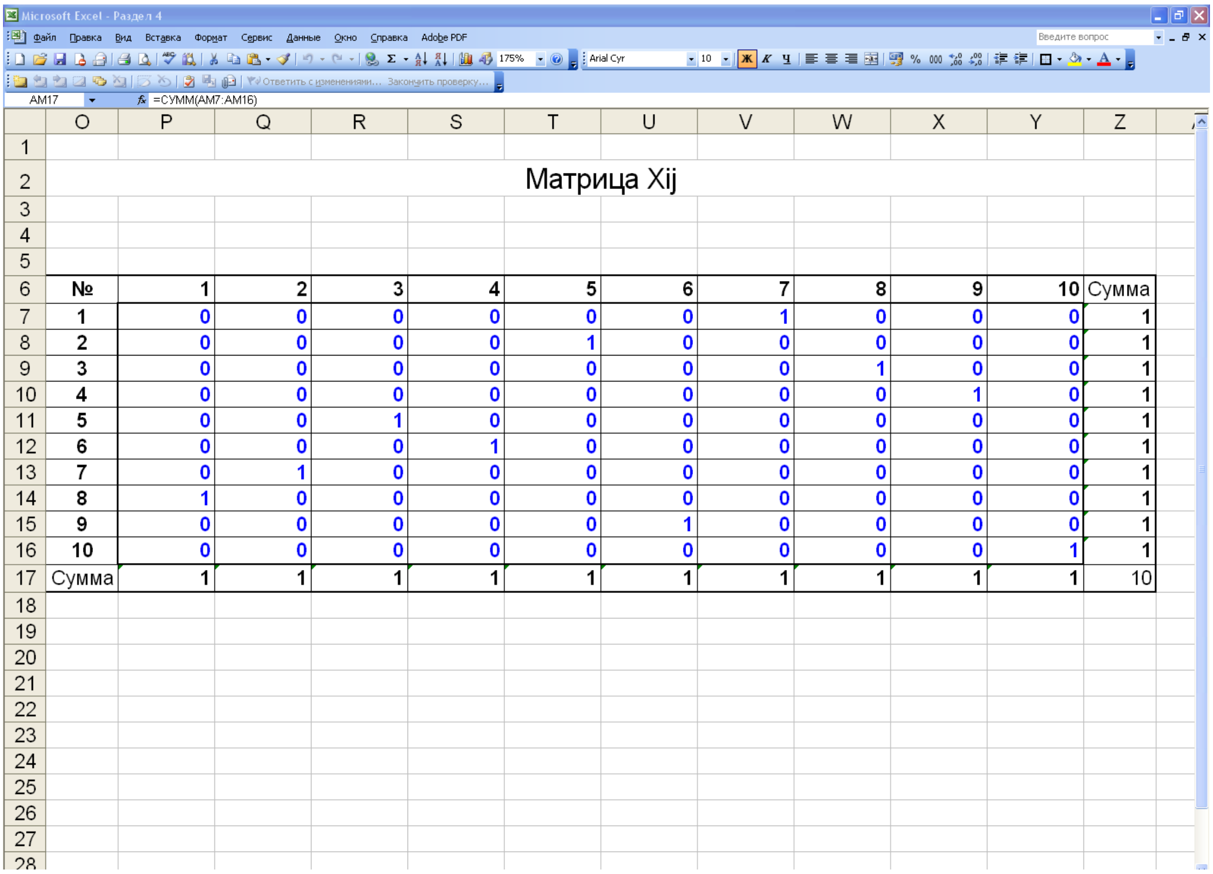
второй – седьмого заказа;

третий – пятого заказа;

четвертый – шестого заказа;

пятый – второго заказа;
шестой – девятого заказа;
седьмой – первого заказа;
восьмой – третьего заказа;
девятый – четвертого заказа;
третий автомобиль, назначенный фиктивному десятому клиенту, будет простаивать в парке.

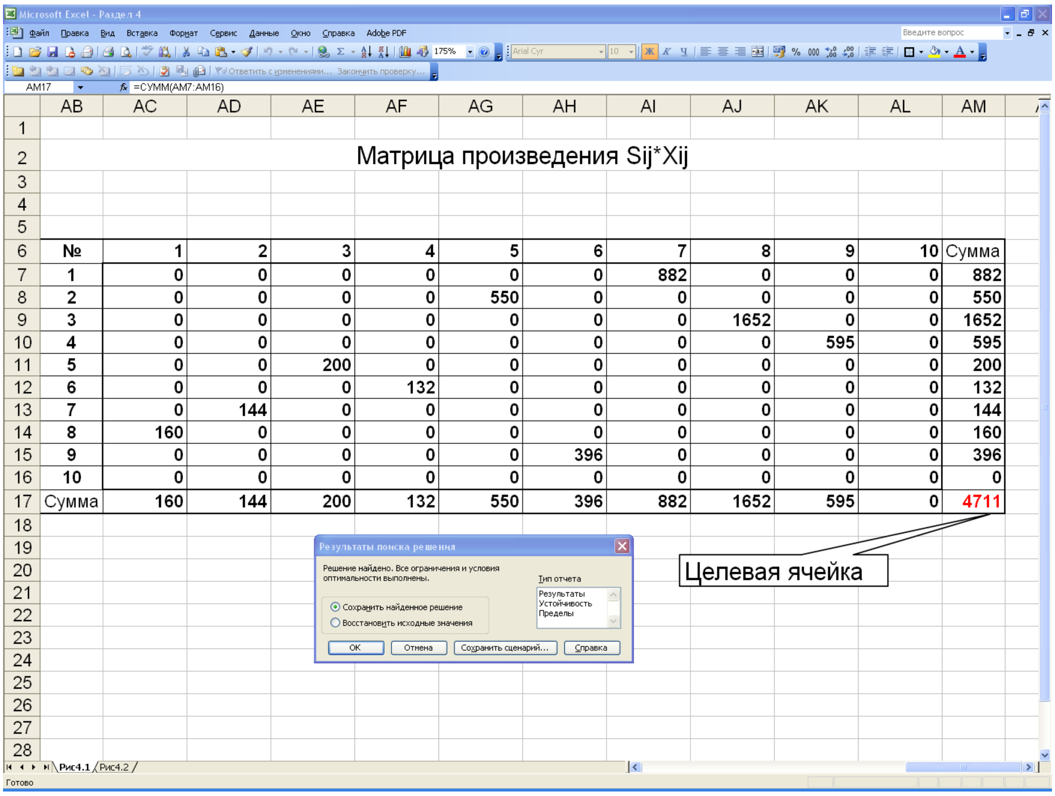
Эксплуатационные затраты при этом минимальны и составят $4711 (см. рис. 6)



Матрица Xij

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Сумма	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10

Рисунок 5



№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
1	0	0	0	0	0	0	882	0	0	0	882
2	0	0	0	0	550	0	0	0	0	0	550
3	0	0	0	0	0	0	0	1652	0	0	1652
4	0	0	0	0	0	0	0	0	595	0	595
5	0	0	200	0	0	0	0	0	0	0	200
6	0	0	0	132	0	0	0	0	0	0	132
7	0	144	0	0	0	0	0	0	0	0	144
8	160	0	0	0	0	0	0	0	0	0	160
9	0	0	0	0	0	396	0	0	0	0	396
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сумма	160	144	200	132	550	396	882	1652	595	0	4711

Рисунок -6

Занятие 7 Решение задач на системы массового обслуживания

Задание №1. Отгрузка производится со склада, имеющего ***n*** погрузочных площадок. На склад для погрузки поступает простейший поток грузовиков с интенсивностью **λ** машин в час. Среднее время погрузки одной машины составляет $\mathbf{t_{обсл}}$ минут. Если все погрузочные площадки заняты, то грузовики становятся в очередь.

1) Укажите вид системы обслуживания.

2) Определите интенсивность обслуживания и параметр загрузки системы.

3) Сколько погрузочных площадок должен иметь склад, чтобы очередь не была бесконечной? Выполняется ли это условие для данной СМО?

4) Перечислите возможные состояния СМО и найдите соответствующие им вероятности.

5) Найдите вероятность того, что очереди нет.

6) Какова вероятность наличия очереди?

7) Какова вероятность того, что в очереди не более «**k**» грузовиков?

8) Найдите среднее количество грузовиков в очереди.

9) Каково среднее число грузовиков на обслуживании?

10) Каково среднее число грузовиков на складе?

11) Укажите среднее время пребывания грузовика в очереди.

12) Найдите среднее время пребывания грузовика на складе.

Оцените работу склада с помощью показателей эффективности, найденных в пунктах 5 – 12.

Варианты заданий:

	λ	**$t_{обсл}$**	**n**	**k**
№ 1.	7	30	4	4
№ 2.	9	15	3	2
№ 3.	5	18	2	4
№ 4.	10	15	3	2
№ 5.	12	11	3	2
№ 6.	15	10	3	5
№ 7.	10	21	4	2
№ 8.	14	12	3	4
№ 9.	4	21	2	3
№ 10.	3	22	2	4

Задание №2. Интенсивность потока пассажиров в кассах железнодорожного вокзала составляет λ чел. в мин. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного пассажира $T_{об}$ мин. Определить минимальное количество кассиров $n = n_{\min}$ при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{\min}$ (вероятность того, что в узле расчёта отсутствуют покупатели, вероятность очереди, среднее число заявок находящихся в очереди, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее число заявок, среднее время пребывания заявки в системе, доля занятых обслуживанием кассиров) Исходные данные показаны в таблице 9

Таблица 9 – Исходные данные

Показатель	Вариант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	1,37	1,62	1,42	1,83	1,75	1,55	1,4	1,65	1,7	1,3
$T_{об}$	2,3	2	1	2,5	1,5	1,7	1,2	2,6	1	2,5

Задание №3. На грузовой станции имеется два выгрузочных фронта. Интенсивность подхода составов под выгрузку составляет λ составов в сутки. Среднее время разгрузки одного состава $T_{об}$ суток. Приходящий поезд отправляется на другую станция, если в очереди на разгрузку стоят более трёх составов. Оценить эффективность работы выгрузочных фронтов станции: вероятность, что выгрузочные фронты свободны, вероятность, что состав останется без разгрузки, среднее число поездов, ожидающих разгрузки, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди. Исходные данные представлены в таблице 10

Таблица 10 – Исходные данные

Показатель	Вариант									
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
λ	5,1	2,68	1,87	5,62	2,82	1,93	2,68	1,85	4,42	2,36
$T_{об}$	0,3	0,6	0,9	0,2	0,55	0,8	0,55	0,7	0,3	0,8

Список литературы

1. Милославская, С. В. Транспортные системы и технологии перевозок: учебное пособие / С.В. Милославская, Ю.А. Почаев. — Москва: ИНФРА-М, 2021. — 116 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/7681. - ISBN 978-5-16-010064-7. – Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1784113
2. Бродецкий Г.Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации: учебник для студ. учреждений высш. Образования / Г.Л. Бродецикй, Д.А. Гусев. – 2-е ищд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. 288с.
3. Минько, Р. Н. Организация производства на транспорте: учебное пособие / Р.Н. Минько Р.Н. - М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2018. - 160 с. - ISBN 978-5-9558-0423-1. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/974412
4. Варгунин, В. И. Теория транспортно-логистических процессов: конспект лекций: учебное пособие / В. И. Варгунин, Е. Е. Москвичева, С. Н. Шишкина. — Самара: СамГУПС, 2021. — 66 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/170635

Составитель: Вагайцев Павел Сергеевич

Теория транспортных процессов и систем

Методические указания для практических занятий

Печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка: П.С. Вагайцев

Подписано к печати

Формат 60x84 1/16. Объем 2, уч.-изд.л.

Тираж 50 экз. Заказ №

Изд. № 54

Отпечатано в типографии Инженерного института НГАУ

630039, Новосибирск, ул. Никитина, 147