



ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Инженерный институт

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Новосибирск 2020

УДК 539.3/6

ББК 22.2

Ш 554

Соппротивление материалов: конспект лекций / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 120 с. изд. перераб. и доп.

Конспект лекций содержит краткое иллюстративное изложение основных изучаемых тем, в соответствии с программой дисциплины «Соппротивление материалов», формулы для расчетов, примеры решения инженерных задач.

Предназначен для студентов очной и заочной форм обучения всех направлений подготовки Инженерного института (Агроинженерия, Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, Технология транспортных процессов, Профессиональное обучение (по отраслям), Техносферная безопасность) при изучении и закреплении соответствующих тем дисциплин Соппротивление материалов и Механика.

Методическая разработка рекомендована студентам других факультетов ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ, обучающимся по инженерным направлениям подготовки (Природообустройство и водопользование, Продукты питания из растительного сырья, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания, Стандартизация и метрология, Строительство), изучающим соответствующие разделы и темы дисциплин Соппротивление материалов, Механика, Прикладная механика, согласно утвержденным учебным планам и рабочим программам дисциплин.

Утвержден и рекомендован к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2020 г. № 2)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Литература	4
Тема 0: Основные положения сопротивления материалов	5
Тема 1: Геометрические характеристики плоских сечений	11
Тема 2: Осевое растяжение (сжатие)	21
Тема 3: Расчет сжатых стержней на устойчивость	30
Тема 4: Прочность при срезе и смятии	36
Тема 5: Плоский изгиб	39
Тема 6: Кручение	59
Тема 7: Сложное сопротивление	68
Тема 8: Статически неопределимые конструкции	88
Тема 9: Основы динамического расчета	100
Краткий обзор материала	114

Введение

Полный курс сопротивления материалов состоит из традиционных видов учебной работы: лекций, лабораторных и практических занятий, самостоятельной работы студентов.

Изучение любой учебной дисциплины начинается с изучения теоретических основ. Лекционный курс является неотъемлемой частью учебного процесса.

Конспект лекций представляет собой сжатый курс дисциплины сопротивление материалов, читаемый в Инженерном институте. Содержание дисциплины соответствует требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Материал лекций изложен в лаконичной, доступной для понимания студентами форме. Каждая лекция содержит дозированное количество информации, соответствующее рассмотрению в течение одной учебной пары. Лекции имеют достаточное количество графических иллюстраций. Практически значимые расчетные формулы в тексте выделены, имеют наименования и сквозную нумерацию, что создает удобство для их использования в последующих расчетах. Некоторые положения не содержат строгого теоретического обоснования, но акцент делается на их практическом применении. Изложение теоретического материала сопровождается решением практических задач несложного содержания, которые не перегружают лекцию, но достаточны для понимания общей последовательности расчета и особенностей применения той или иной формулы.

При изучении дисциплины конспект лекций является хорошим дополнением к обязательной литературе и имеющимся на кафедре методическим разработкам для самостоятельной работы.

Литература

1. Куликов, Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие / Ю.А. Куликов. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 272 с. – ISBN 978-5-8114-2449-8. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/91882> (дата обращения: 25. 06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
2. Молотников, В.Я. Курс сопротивления материалов: учебное пособие / В.Я. Молотников. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 384 с. – ISBN 978-5-8114-0649-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/71756> (дата обращения: 25.06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
3. Сопротивление материалов: задания для практических занятий, самостоятельной, контрольной и расчетно-графической работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 48 с. изд. перераб. и доп.
4. Сопротивление материалов: учеб. пособие по самостоятельной работе / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 84 с. изд. перераб. и доп.
5. Сопротивление материалов: сборник тестов для контроля знаний студентов / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Инженер. ин-т; сост. А.А. Шибков, С.А. Булгаков, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2020. – 44 с. изд. перераб. и доп.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1. Цели и задачи курса

Любое техническое изделие (конструкция) должно сохранять работоспособность в течение определенного промежутка времени. Это основное свойство конструкции называется *надежностью*. Вопросами обеспечения и реализации надежности занимаются все дисциплины инженерного образования. **Сопротивление материалов** обеспечивает на стадии проектирования две составляющие части надежности конструкции: **прочность и жесткость**.

Под *прочностью* понимается *свойство конструкции сопротивляться разрушению*. *Жесткостью* называется *свойство конструкции сопротивляться деформации*.

Содержание дисциплины «сопротивление материалов» составляет изучение влияния на прочность и жесткость деталей и простейших конструкций трех основных факторов:

- *размеров и геометрической формы детали в основном ее поперечного сечения;*
- *материала;*
- *нагрузки.*

2. Расчетная схема

Объектом анализа (расчета) является **расчетная схема конструкции**, которая должна сохранять ее существенные признаки:

- геометрию детали;
- условия закрепления (соединения) деталей;
- внешние воздействия (нагрузку, закон движения, условия эксплуатации).

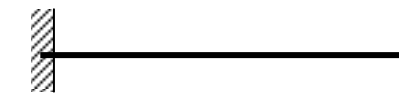
Материал в расчетах принимается:

- *сплошным*, обладающим одинаковыми свойствами в любом объеме детали, в том числе и бесконечно малом;
- *однородным*, имеющим одинаковые свойства в любой точке детали;
- *изотропным*, имеющим одинаковые свойства во всех направлениях;
- *ненапряженным* до приложения нагрузки;
- *идеально упругим*, полностью восстанавливающим свою форму и размеры после снятия нагрузки;
- *линейно деформируемым*, то есть следующим закону Гука.

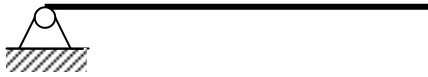
Деталь в зависимости от геометрической формы считается:

- *стержнем (брусом)*, если длина детали значительно больше ее поперечных размеров;
- *оболочкой*, если длина и ширина детали во много раз превышают ее толщину (частным случаем оболочки является *пластина*);
- *массивным телом*, если размеры детали во всех направлениях мало отличаются друг от друга.

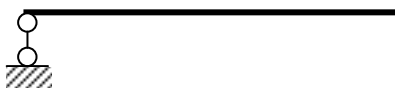
Способы закрепления (соединения) деталей в основном сводятся к следующему:



– жесткая заделка, не допускающая перемещения детали как жесткого целого;



– неподвижный цилиндрический шарнир, допускающий взаимный поворот деталей в плоскости чертежа;



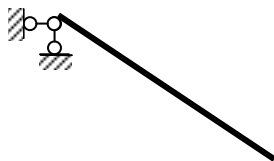
– подвижный цилиндрический шарнир, не допускающий движения по направлению связи;



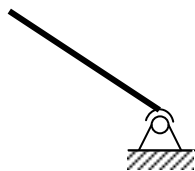
– упругая опора (упругий подвижный шарнир);



– жесткая втулка, допускающая поступательное движение в осевом направлении;



– подвижный пространственный шарнир, допускающий движение стержня в осевом направлении;



– неподвижный пространственный (сферический) шарнир, допускающий поворот в трехмерном пространстве.

Нагрузка, действующая на деталь, по способу приложения может рассматриваться, как:

- *сосредоточенная* в точке, если область приложения мала по сравнению с размерами детали;
- *распределенная* по объему детали, по поверхности, по линии.

По длительности действия:

- *постоянная*, действующая на протяжении всего периода эксплуатации;
- *временная*, действующая в течение ограниченного промежутка времени.

По характеру действия:

- *статическая*, возрастающая от нуля до своего конечного значения настолько медленно, что возникающими при этом ускорениями, а, следовательно, и силами инерции можно пренебречь;
- *динамическая*, вызывающая значительные силы инерции.

3. Основные принципы

В основе сопротивления материалов лежат три основных принципа, или правила.

Принцип относительной жесткости конструкции предполагает реальные деформации настолько малыми, что ими можно пренебречь и вести расчет по недеформированной расчетной схеме.

Принцип независимости действия сил, согласно которому результат от действия на деталь системы сил можно найти, суммируя результаты от действия каждой силы в отдельности в любой последовательности.

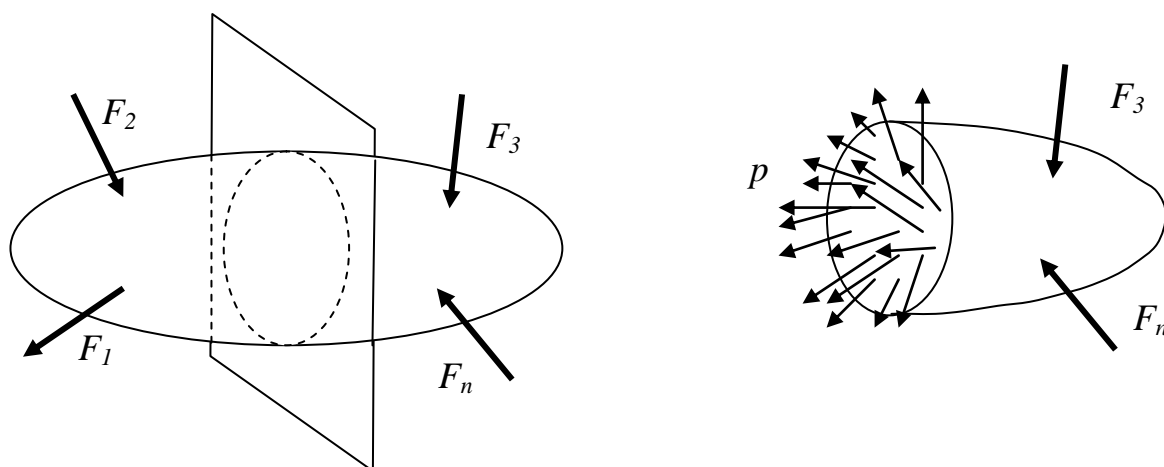
Принцип Сен-Венана заключается в том, что на достаточном удалении от места приложения нагрузки (обычно на расстоянии размера поперечного сечения детали) результат от ее действия перестает зависеть от конструктивного способа приложения нагрузки, а определяется только ее равнодействующей.

Кроме перечисленных принципов при анализе расчетных схем во многих случаях справедлива *гипотеза плоских сечений*, согласно которой поперечные сечения плоские до деформации остаются плоскими и в процессе деформации.

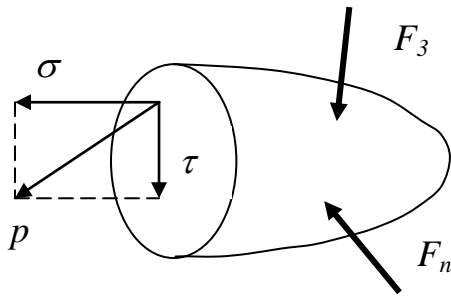
4. Понятие о напряжениях

При действии на деталь внешней нагрузки вследствие деформации материала в нем возникают внутренние усилия, стремящиеся разорвать силы взаимного притяжения частиц материала. Чтобы «увидеть» внутренние усилия, их нужно перевести в разряд внешних сил. Для этого мысленно рассечем деталь плоскостью и одну из частей отбросим. Тогда в сечении получим распределенную по всему сечению систему внутренних сил, действующих в каждой точке сечения. Внутренняя сила, действующая в точке сечения, называется *полным напряжением* в данной точке и обозначается символом p .

Вектор напряжения имеет произвольное направление. Разложим вектор полного напряжения p в какой-либо точке сечения на две составляющие: направленную по нормали к сечению σ и направленную по касательной к сечению τ .



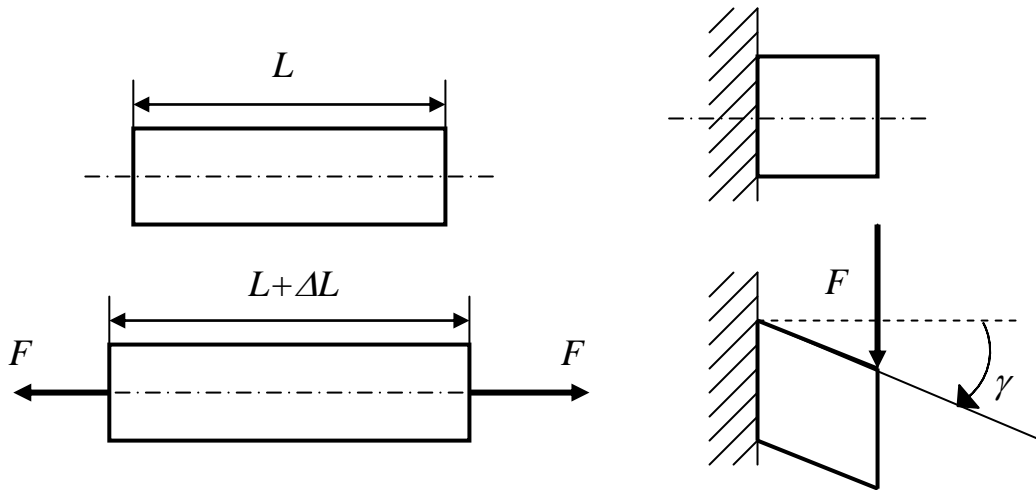
Нормальная составляющая σ полного напряжения называется **нормальным напряжением**, касательная составляющая τ называется **касательным напряжением** в данной точке сечения. Размерность напряжений – паскаль (Па).



Значения нормальных σ и касательных τ напряжений являются объективными характеристиками нагруженности детали и, следовательно, критериями ее прочности.

5. Понятие о деформации

Деформация детали заключается в **изменении** ее **размеров** и (или) **формы**.



Изменение размера при деформации детали оценивается относительным удлинением (**линейной деформацией**) $\varepsilon = \Delta L / L$.

Изменение формы характеризует **угловая деформация** (угол сдвига) γ .

Обе характеристики относительные, поэтому являются безразмерными.

Материал в расчетах считается линейно деформируемым, то есть напряжения в нем растут пропорционально деформации (1) – **закон Гука**, где E и G – упругие константы материала.

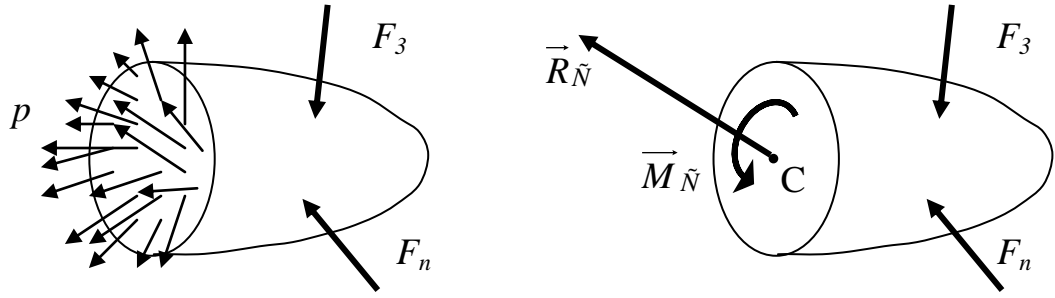
$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon; \\ \tau = G\gamma \end{cases} \quad (1)$$

закон Гука

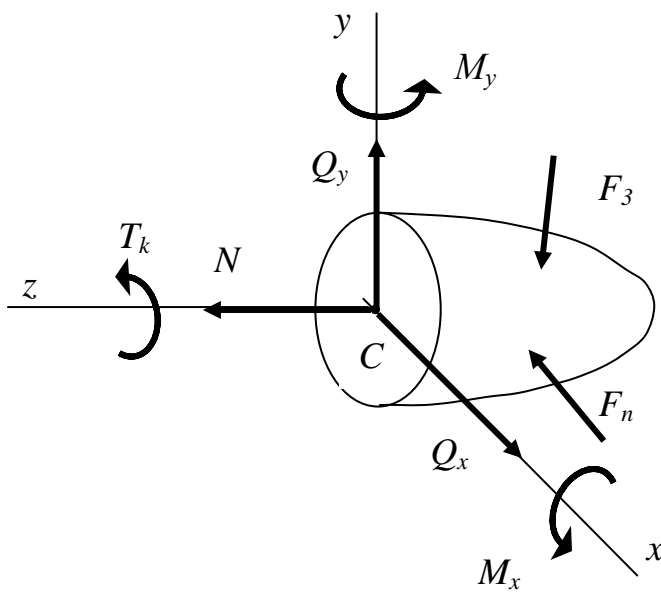
Закон Гука лежит в основе аналитических формул сопротивления материалов.

6. Метод сечений

Напряжения представляют собой систему сил, распределенных по сечению детали. Значения напряжений зависят от внешних сил, действующих на деталь. Но выразить в общем виде напряжения через внешние силы довольно сложно. Поэтому вначале определяют не сами напряжения, а их статические эквиваленты по сечению, называемые **внутренними силовыми факторами**.



Согласно правилам теоретической механики, напряжения в сечении как систему сил, заменим *главным вектором* \vec{R}_C и *главным моментом* \vec{M}_C системы, приведенными к центру сечения (точке C).



Сечение свяжем с системой прямоугольных координат: начало координат совместим с центром сечения C, оси x и y проведем в плоскости сечения, ось z направим по внешней нормали к сечению. Разложим главный вектор $\vec{R}_{\tilde{N}}$ и главный момент $\vec{M}_{\tilde{N}}$ на составляющие по направлению этих осей.

Полученные шесть составляющих: $N, Q_x, Q_y, T_k, M_x, M_y$ называются **внутренними силовыми факторами**. По

своей сущности они являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений в данном сечении. Легко доказать, что силовые факторы N, M_x, M_y – это статические эквиваленты нормальных напряжений, а силовые факторы, лежащие в плоскости сечения Q_x, Q_y, T_k , – статические эквиваленты касательных напряжений.

Для вычисления значений внутренних силовых факторов необходимо составить уравнения равновесия рассматриваемой части детали:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum X = 0, \Rightarrow Q_x; \\ \sum Y = 0, \Rightarrow Q_y; \\ \sum Z = 0, \Rightarrow N; \\ \sum m_x = 0, \Rightarrow M_x; \\ \sum m_y = 0, \Rightarrow M_y; \\ \sum m_z = 0, \Rightarrow T_k. \end{array} \right.$$

В каждое из этих уравнений войдет только одно неизвестное, поэтому система решается довольно просто. Если расчетная схема конструкции плоская, то число уравнений сократится до трех.

Рассмотренный метод определения внутренних силовых факторов называется *методом сечений* и является основным методом сопротивления материалов.

Метод сечений заключается в следующем:

- деталь мысленно рассекается секущей плоскостью (обычно поперечной, потому что именно в поперечном сечении возникают максимальные напряжения) на две части;
- одна из полученных частей детали мысленно отбрасывается;
- в центр сечения оставшейся части детали помещается система внутренних силовых факторов: N , Q_x , Q_y , T_k , M_x , M_y ;
- составляются уравнения статического равновесия рассматриваемой части детали, откуда находятся значения внутренних силовых факторов.

7. Внутренние силовые факторы. Простые виды деформации

Сила N – *нормальная сила* в сечении. Для поперечных сечений сила N является *продольной силой*, и возникает при *растяжении* или *сжатии*.

Силы Q_x , Q_y – *поперечные силы*, возникают при *сдвиге (срезах)* в двух плоскостях.

Момент T_k – *крутящий момент*, возникает при закручивании стержня (*кручении*).

Моменты M_x , M_y – *изгибающие моменты*, возникают при *изгибе* в двух плоскостях.

При наличии в сечении только одного внутреннего силового фактора деформацию называют *простой* (растяжение-сжатие, сдвиг, кручение, чистый изгиб).

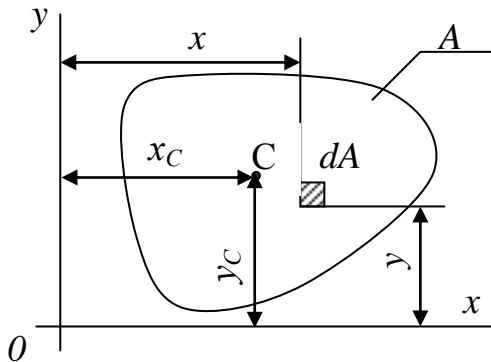
Изучение простых видов деформации составляет содержание первого семестра.

Если в сечении детали возникают два и более силовых факторов, то деформацию называют *сложной (сложное сопротивление)*. Например, растяжение с изгибом, изгиб с кручением.

Сложное сопротивление будет изучаться во втором семестре.

Тема 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Прочность и жесткость деталей зависят от *формы* поперечного сечения, *размеров* и *расположения* сечения относительно действующей на деталь нагрузки. В комплексе учесть эти три фактора позволяют интегральные моменты площади вида (*), где dA – элементарная



$$\int_A y^n dA \quad (*)$$

$$\int_A x^n dA$$

площадка;
 x, y – расстояния от элементарной площадки до координатных осей;
 $n=0; 1; 2; \dots$ – целое число;
 A – площадь сечения.

В зависимости от значения показателя степени n получаем следующие геометрические характеристики сечения.

1.1. Площадь сечения

При $n=0$ выражения (*) представляют собой нулевой момент площади – интегральную сумму элементарных площадок в пределах всего сечения (2), то есть **площадь** сечения A . Размерность площади – m^2 .

$$A = \int_A dA \quad (2)$$

площадь сечения

Площадь сечения A характеризует *прочность* и *жесткость* сечения при *растяжении, сжатии и сдвиге (срезе)*. Значения площади простых сечений вычисляются по формулам, известным из курса школьной геометрии.

$$\begin{cases} S_x = \int_A y \cdot dA \\ S_y = \int_A x \cdot dA \end{cases} \quad (3)$$

статические моменты сечения

1.2. Статические моменты сечения

При $n=1$ выражения (*) дают интегральные моменты площади первой степени (3), которые по своей сути аналогичны моменту силы. Полученные характеристики носят название **статических моментов сечения (площади)** и обозначаются S_x и S_y . Размерность моментов – m^3 .

$$\begin{aligned} S_x &= A \cdot y_c \\ S_y &= A \cdot x_c \end{aligned} \quad (4)$$

для простых сечений

$$S_x = S_y = 0$$

относительно центральных осей

По аналогии с моментом силы статический момент *простого* сечения можно определить, умножая площадь сечения на расстояние от оси до центра сечения. Из (4) следует, что статические моменты сечения могут иметь любой знак, в том числе и равняться нулю относительно координатных осей, проходящих через центр сечения (такие оси называются *центральными*).

Для вычисления статического момента *сложного* сечения по формуле (4) необходимо знать положение его центра, а так как оно обычно неизвестно, нужно разбить сечение на простые составляющие и просуммировать моменты составных частей (5).

$$\begin{aligned} S_x &= A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + \dots \\ S_y &= A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

для составных сечений

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{A_1 y_{C1} + A_2 y_{C2} + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \\ x_C &= \frac{A_1 x_{C1} + A_2 x_{C2} + \dots}{A_1 + A_2 + \dots} \end{aligned} \quad (6)$$

координаты центра составного сечения

Так как формулы (4) и (5) определяют одно и то же, приравняем их правые части:

$$A \cdot y_C = A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + \dots;$$

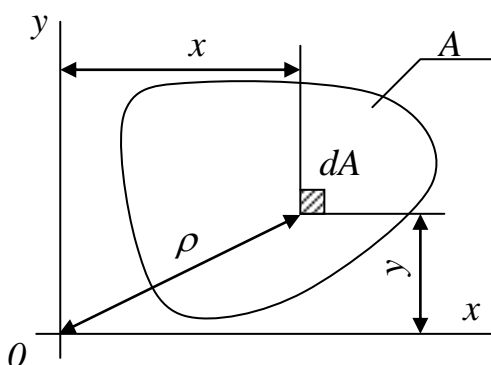
$$A \cdot x_C = A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + \dots$$

Отсюда находим координаты центра сложного составного сечения (6).

Практическое использование статических моментов сечения:

- для определения положения центра составного сечения (6);
- для вычисления касательных напряжений при изгибе (формула Журавского).

1.3. Моменты инерции сечения



Принимая в (*) показатель степени $n=2$, получаем интегральные моменты площади второй степени, которые аналогичны понятию момента инерции массы. Их называют **моментами инерции сечения**, обозначают I .

Различают моменты инерции:

- **осевые** I_x, I_y (7);
- **центробежный** I_{xy} (8);
- **полярный** I_p (9).

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA \\ I_y &= \int_A x^2 dA \end{aligned} \quad (7)$$

осевые моменты инерции

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (8)$$

центробежный момент инерции сечения

$$I_p = \int_A \rho^2 dA \quad (9)$$

полярный момент инерции сечения

Размерность всех моментов инерции сечения – m^4 . Осевые (7) и полярный (9) моменты инерции могут быть только положительными. Центробежный момент инерции (8) сечения может иметь любой знак, в том числе и равняться нулю. В частном случае, чтобы центробежный момент инерции был равен нулю, достаточно, чтобы хоть одна из осей являлась осью симметрии сечения.

Из рисунка видно, что $\rho^2 = y^2 + x^2$, следовательно,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y.$$

$$I_p = I_x + I_y \quad (10)$$

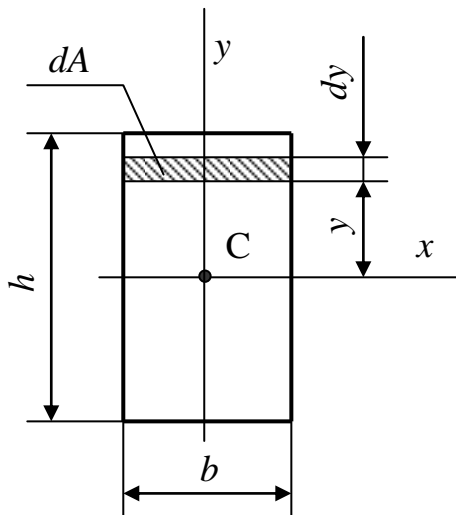
Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции сечения (10).

Практическое применение моментов инерции сечения:

- осевые моменты инерции I_x, I_y характеризуют жесткость детали, работающей на изгиб;
- полярный момент инерции I_p является характеристикой жесткости при кручении;
- центробежный момент инерции самостоятельного значения не имеет, используется в промежуточных расчетах для определения главных моментов инерции и главных осей инерции.

1.4. Моменты инерции простых сечений

Определим значения моментов инерции, наиболее часто встречающихся в расчетной практике сечений относительно их центральных осей.



1.4.1. Прямоугольное сечение $b \times h$

Примем за элементарную площадку dA полоску на ширину сечения, $dA = dy \cdot b$ (в этом случае получим одномерный интеграл). По определению (7)

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 \cdot b \cdot dy = \frac{by^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = 2 \frac{bh^3}{24} = \frac{bh^3}{12}.$$

$$\begin{aligned} I_x &= bh^3/12 \\ I_y &= hb^3/12 \\ I_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

для прямоугольного сечения

Сторона параллельная оси берется в первой степени, сторона перпендикулярная возводится в куб. По аналогии можно записать выражение момента инерции относительно второй оси (11). Центробежный момент инерции равен нулю (оси симметрии). Полярный момент инерции

можно определить по формуле (10), но в расчетах его значение для прямоугольного сечения не используется.

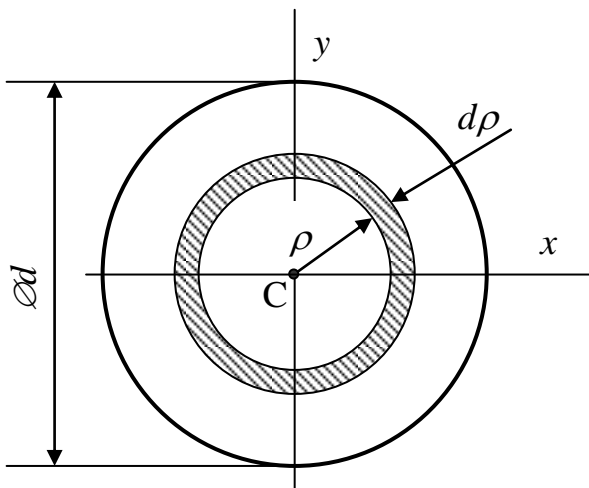
$$\begin{aligned} I_x &= a^4/12 \\ I_y &= a^4/12 \\ I_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

для квадратного сечения

1.4.2. Квадратное сечение $a \times a$

Не повторяя вывод, воспользуемся формулами (11) для прямоугольного сечения, подставив в них значения

$$b = h = a.$$



$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = \frac{2\pi\rho^4}{4} \Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

1.4.3. Круглое сечение диаметром d

Для круглого сечения удобнее сначала определить значение полярного момента инерции.

Элементарную площадку dA возьмем в виде кольца с радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (для получения одномерного интеграла).

Площадь кольца получим, разрезав его и выпрямив в прямоугольник:

$$dA \approx 2\pi\rho \cdot d\rho.$$

Полученное выражение подставим в (9):

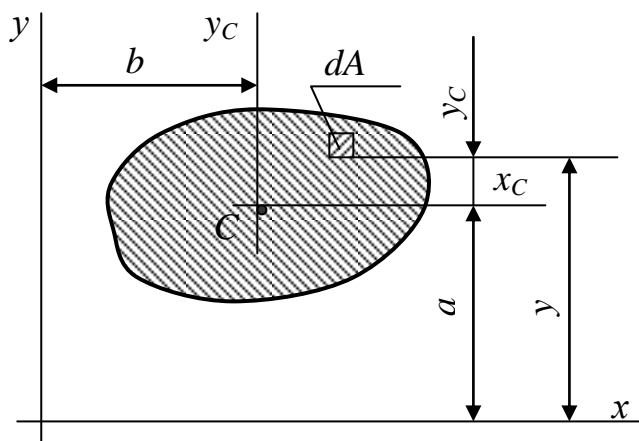
$\begin{aligned} I_p &= \pi d^4 / 32 \\ I_x &= I_y = \pi d^4 / 64 \\ I_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$ <p style="text-align: center; margin: 0;">для круглого сечения</p>

Из формулы (10) следует, что значения осевых моментов инерции в два раза меньше (13).

Для других простых сечений расчетные формулы моментов инерции можно найти в справочной литературе.

К простым сечениям относят и профили стандартного проката: уголки равнополочные и неравнополочные, швеллеры, двутавры, трубы круглые и квадратные. Числовые значения моментов инерции и других геометрических характеристик этих сечений содержатся в таблицах сортамента проката.

1.5. Зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей. Моменты инерции сложных сечений



Считаем, что значения моментов инерции сечения относительно его центральных осей x_c и y_c известны. Определим значения моментов инерции сечения относительно произвольных осей x и y , параллельных центральным осям.

Момент инерции сечения относительно оси x по определению (7)

$$I_x = \int_A y^2 dA. \quad (*)$$

Расстояние y от элементарной площадки до оси x заменяем суммой двух отрезков: y_C (расстояние от площадки до центральной оси) и a (расстояние между параллельными осями), то есть $y=y_C+a$. Тогда (*)

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_C + a)^2 dA = \int_A y_C^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y_C dA = I_{x_C} + a^2 A,$$

где $\int_A y_C^2 dA = I_{x_C}$ – момент инерции относительно центральной оси;

$\int_A dA = A$ – площадь сечения (2);

$\int_A y_C dA = S_{x_C} = 0$ – статический момент (3) относительно центральной оси.

Следовательно, момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между параллельными осями.

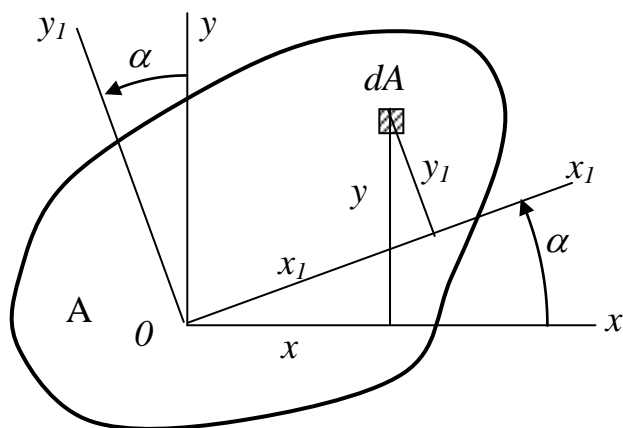
$$\begin{aligned} I_X &= I_{x_C} + A \cdot a^2 \\ I_Y &= I_{y_C} + A \cdot b^2 \\ I_{XY} &= I_{x_C y_C} + A \cdot a \cdot b \end{aligned} \quad (14)$$

зависимости для
параллельных осей

Аналогично можно получить выражения для момента инерции относительно второй оси и для центробежного момента инерции (14).

Зависимости (14) используются для вычисления значений моментов инерции сложных сечений:

- сечение разбивается на простые составляющие;
- для каждой составной части определяются по формулам или выписываются из таблиц сортамента проката значения моментов инерции относительно ее центральных осей;
- определяется положение центра всего сечения (6) и проводятся центральные оси всего сечения;
- определяются значения моментов инерции всего сечения суммированием моментов инерции составных частей с использованием зависимостей (14), где a и b – расстояния между центральными осями всего сечения и центральными осями составных частей.



1.6. Зависимости между моментами инерции сечения при повороте координатных осей

Пусть относительно осей xOy моменты инерции сечения I_X, I_Y, I_{XY}, I_P известны. Определим, как изменятся значения моментов инерции, если координатные оси повернуть на некоторый угол α , то есть найдем значения $I_{X1}, I_{Y1}, I_{X1Y1}, I_{P1}$.

Запишем соотношения между координатами элементарной площадки dA в осях xOy и $x_1O_1y_1$:

$$x_I = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_I = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Полученные выражения подставим в определения моментов инерции (7) и (8), например,

$$I_{x_I} = \int_A y_I^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA -$$

$$- 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha,$$

где интегралы в сумме представляют собой моменты инерции сечения в

$$I_{x_I} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_I} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$
(15)

$$I_{x_I y_I} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$
(16)

$$I_{P_I} = I_{x_I} + I_{y_I} = I_x + I_y = I_P = \text{const}$$
(17)

начальной системе координат xOy . Аналогично можно получить выражения для I_{y_I} (15) и $I_{x_I y_I}$ (16). Сложив почленно выражения (15), получаем вывод (17): значение полярного момента инерции при повороте осей не меняется (начало координат остается на месте), следовательно,

сумма осевых моментов инерции при повороте осей остается величиной постоянной. Поэтому если один из осевых моментов при повороте осей достигнет максимума, то значение второго осевого момента будет минимальным.

1.7. Главные оси и главные моменты инерции сечения

*Центральные координатные оси сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются **главными центральными осями инерции сечения**.*

Для определения положения главных осей несимметричного сечения приравняем к нулю выражение (16) центробежного момента инерции:

$$I_{x_I y_I} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = 0. \text{ Поделив обе части равенства на}$$

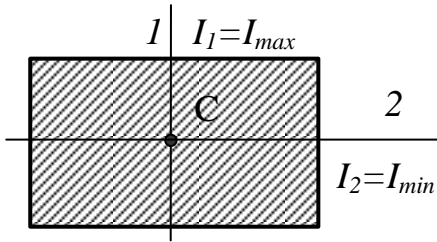
$$\text{tg } 2\alpha = - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (18)$$

значение угла, определяющее положение главных осей инерции

$\cos 2\alpha \neq 0$, получим значение угла (18), определяющее положение главных осей инерции.

Исследовав выражения (15) осевых моментов инерции на экстремум, получим такое же значение угла (18).

Следовательно, *относительно главных осей инерции осевые моменты инерции имеют экстремальные значения* (один из них максимален, другой – минимален). Чтобы отличить главные оси от других произвольных, обозначим их цифрами 1 и 2, причем относительно оси 1 момент инерции должен быть всегда максимальным, относительно оси 2 – минимальным, то есть: $I_1 = I_{max}; I_2 = I_{min}$.



Осевые моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции сечения**: $I_1=I_{max}$; $I_2=I_{min}$. Чтобы получить формулу для их вычисления, необходимо в выражениях (15) тригонометрические функции преобразовать к $tg2\alpha$, после чего заменить $tg2\alpha$ на выражение (18). В итоге получится формула (19), где знак плюс берется при вычислении $I_1=I_{max}$, знак минус – при вычислении $I_2=I_{min}$.

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} \quad (19)$$

значения главных моментов инерции сечения

Формула (18), определяющая положение главных осей инерции, неудобна для практического применения: для их правильной нумерации требуется определенная привычка. Более удобны в применении формулы (20), которые приведем без вывода. Угол α_1 откладывается от оси x и определяет положение оси 1, угол α_2 откладывается от оси x и определяет положение оси 2. Положительные углы откладываются против часовой стрелки. При использовании формул (20) появляется возможность проверить все вычисления: главные оси должны быть взаимно перпендикулярными, то есть должно выполняться равенство $|\alpha_1| + |\alpha_2| \cong 90^\circ$.

$$tg\alpha_1 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} \quad (20)$$

$$tg\alpha_2 = \frac{I_{xy}}{I_y - I_2}$$

значения углов, определяющие положение главных осей инерции

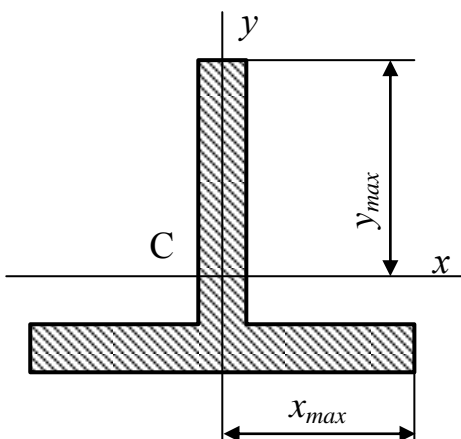
Формула (18), определяющая положение главных осей инерции, неудобна для практического применения: для их правильной нумерации требуется определенная привычка. Более удобны в применении формулы (20), которые приведем без вывода. Угол α_1 откладывается от оси x и определяет положение оси 1, угол α_2 откладывается от оси x и определяет положение оси 2. Положительные углы откладываются против часовой стрелки. При использовании формул (20) появляется возможность проверить все вычисления: главные оси должны быть взаимно перпендикулярными, то есть должно выполняться равенство $|\alpha_1| + |\alpha_2| \cong 90^\circ$.

Главными осями инерции применяются в теории изгиба и устойчивости сжатых стержней.

1.8. Моменты сопротивления сечения

Моменты сопротивления сечения обозначаются символом W , имеют размерность m^3 .

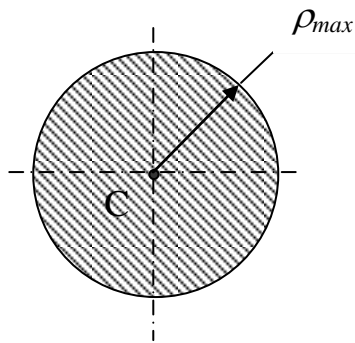
Осевой момент сопротивления (21) равен отношению момента инерции относительно данной центральной оси к модулю расстояния от оси до наиболее удаленной точки сечения. Осевые моменты сопротивления характеризуют прочность сечения детали при изгибе.



$$W_x = \frac{I_x}{|y_{max}|} \quad (21)$$

$$W_y = \frac{I_y}{|x_{max}|}$$

осевые моменты сопротивления сечения



Полярный момент сопротивления сечения равен отношению полярного момента инерции к расстоянию от центра до наиболее удаленной точки сечения. Полярный момент сопротивления характеризует прочность сечения при кручении.

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}} \quad (22)$$

полярный момент
сопротивления сечения

1.9. Радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

(23)

радиусы инерции сечения

Обозначение радиусов инерции – i_x , i_y ; размерность – м.

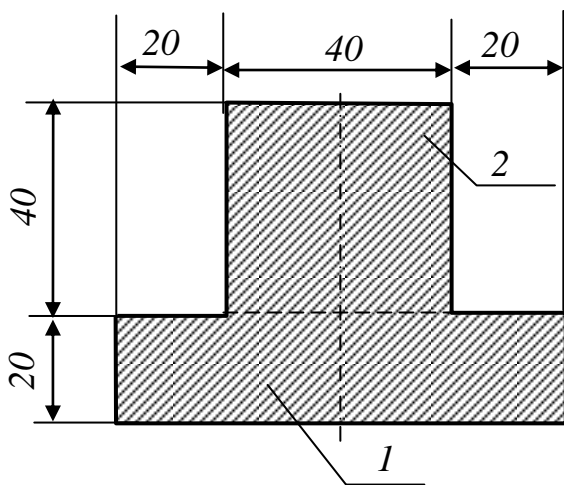
Радиус инерции (23) равен корню квадратному из отношения момента инерции к площади сечения. Значение радиуса инерции характеризует устойчивость сечений при сжатии (продольном изгибе) стержня.

Расчетные формулы геометрических характеристик простых сечений для удобства пользования сведем в таблицу.

Сечение	Геометрические характеристики									
	A	I_x	I_y	I_{xy}	I_p	W_x	W_y	W_p	i_x	i_y
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	-	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	-	$\frac{h}{\sqrt{12}}$	$\frac{b}{\sqrt{12}}$
	a^2	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	0	-	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	-	$\frac{a}{\sqrt{12}}$	$\frac{a}{\sqrt{12}}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	$\frac{d}{4}$	$\frac{d}{4}$

Пример определения геометрических характеристик сечения

Определим основные геометрические характеристики сечения, изображенного на рисунке.



Решение

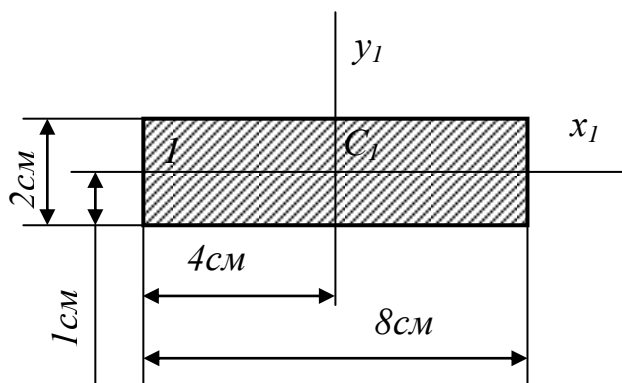
Разобьем сечение на простые фигуры:

1 – прямоугольник, 2 – квадрат.

Для каждой части определяем:

- габаритные размеры;
- положение центра;
- площадь сечения;
- значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей.

Чтобы вычисления были компактными все размеры берем в сантиметрах.



Прямоугольник:

- габариты 8×2 см;
- положение центра $C_1(4\text{ см}; 1\text{ см})$;

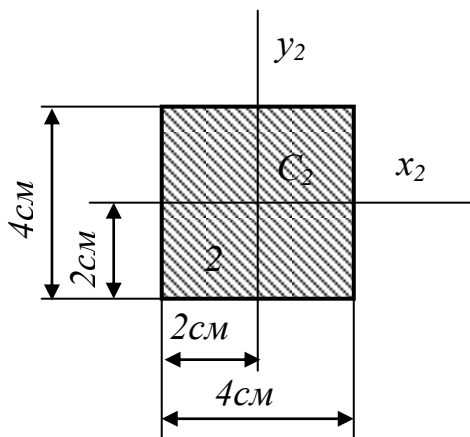
– площадь $A_1=8\cdot 2=16\text{ см}^2$;

– моменты инерции (11)

$$I_{1x_1}=(8\cdot 2^3)/12=5,3\text{ см}^4;$$

$$I_{1y_1}=(2\cdot 8^3)/12=85,3\text{ см}^4;$$

$$I_{1x_1y_1}=0 \text{ (оси симметрии).}$$



Квадрат:

- габариты 4×4 см;
- положение центра $C_2(2\text{ см}; 2\text{ см})$;

– площадь $A_1=4\cdot 4=16\text{ см}^2$;

– моменты инерции (12)

$$I_{2x_2}=4^4/12=21,3\text{ см}^4;$$

$$I_{2y_2}=4^4/12=21,3\text{ см}^4;$$

$$I_{2x_2y_2}=0 \text{ (оси симметрии).}$$

Делаем чертеж сечения в масштабе, переносим на него точки C_1 и C_2 , вычисляем геометрические характеристики всего сечения.

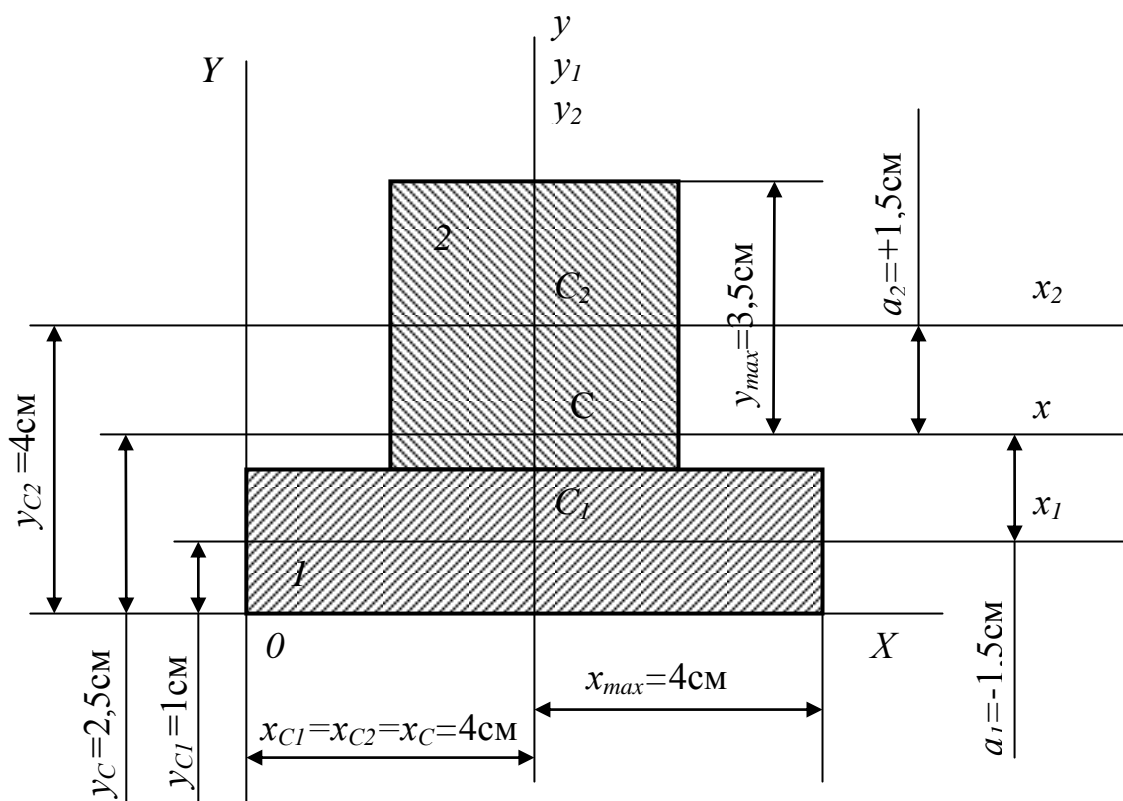
Площадь сечения $A=A_1+A_2=16+16=32\text{см}^2$.

Положение центра сечения. Проводим координатные оси XOY так, чтобы все сечение оказалось в первом квадранте. В этой системе определяем координаты центров C_1 и C_2 : $x_{C1}=4\text{см}$; $x_{C2}=4\text{см}$; $y_{C1}=1\text{см}$; $y_{C2}=4\text{см}$. По формулам (6) вычисляем координаты общего центра C :

$x_C=(A_1 \cdot x_{C1}+A_2 \cdot x_{C2})/A=(16 \cdot 4+16 \cdot 4)/32=4\text{см}$ (можно было не вычислять, так как сечение имеет вертикальную ось симметрии и центр должен располагаться на этой оси);

$y_C=(A_1 \cdot y_{C1}+A_2 \cdot y_{C2})/A=(16 \cdot 1+16 \cdot 4)/32=2,5\text{см}$.

Откладываем центр $C(4\text{см};2,5\text{см})$ в масштабе на чертеже.



Моменты инерции сечения. На чертеже через центры C , C_1 и C_2 проводим горизонтальные и вертикальные оси, обозначаем их и находим расстояния между параллельными осями с учетом их знаков:

$a_1=y_{C1}-y_C=1-2,5=-1,5\text{см}$; $a_2=y_{C2}-y_C=4-2,5=+1,5\text{см}$; $b_1=b_2=0$ (так как вертикальные оси y , y_1 , y_2 совпали).

Используя формулы (14) для параллельных осей, вычисляем значения моментов инерции всего сечения:

$$I_X = I_{IX} + I_{2X} = [I_{IX1} + A_1 \cdot (a_1)^2] + [I_{2X2} + A_2 \cdot (a_2)^2] = [5,3 + 16 \cdot (-1,5)^2] + [21,3 + 16 \cdot (+1,5)^2] = 98,6 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_{IY} + I_{2Y} = [I_{IY1} + A_1 \cdot (b_1)^2] + [I_{2Y2} + A_2 \cdot (b_2)^2] = [85,3 + 0] + [21,3 + 0] = 106,6 \text{ см}^4.$$

Значение центробежного момента инерции можно не вычислять, так как y – ось симметрии сечения, поэтому $I_{XY} = 0$. Отсюда следует, что оси x и y являются главными осями инерции сечения. Сравнивая значения осевых моментов инерции, делаем вывод о нумерации главных осей:

$$I_Y = 106,6 = I_{\max} = I_1; \quad I_X = 98,6 = I_{\min} = I_2.$$

Моменты сопротивления сечения вычисляем по формулам (21):

$$W_X = I_X / y_{\max} = 98,6 / 3,5 = 28,2 \text{ см}^3;$$

$$W_Y = I_Y / x_{\max} = 106,6 / 4 = 26,7 \text{ см}^3.$$

Радиусы инерции сечения находим по формулам (23):

$$i_X = \sqrt{I_X / A} = \sqrt{98,6 / 32} = 1,76 \text{ см} = i_{\min};$$

$$i_Y = \sqrt{I_Y / A} = \sqrt{106,6 / 32} = 1,83 \text{ см} = i_{\max}.$$

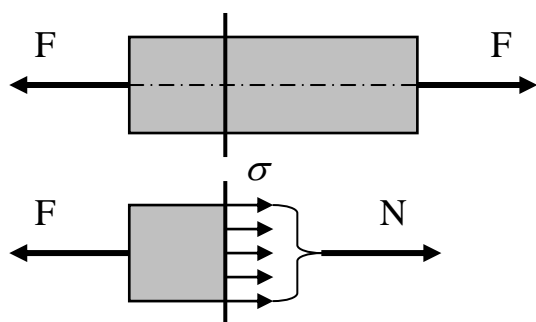
Тема 2. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Растяжением или сжатием называется такой вид деформации, при которой в поперечном сечении детали возникает только продольная (нормальная) сила N . Значение продольной силы определяется методом сечений. Принято на



расчетных схемах продольную силу направлять всегда от сечения. Тогда, если $N > 0$ – деталь работает на растяжение, если $N < 0$ – деталь испытывает сжатие.

2.1. Напряжения в поперечных сечениях

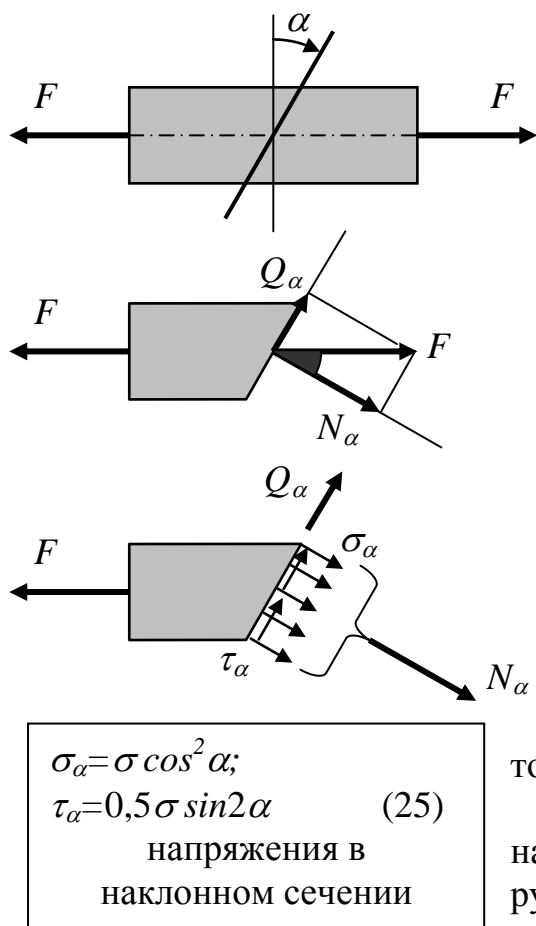


$$\sigma = \frac{N}{A} = \text{const} \quad (24)$$

напряжения в поперечном сечении

Как и любой внутренний силовой фактор, продольная сила N является равнодействующей напряжений в рассматриваемом сечении. Вполне очевидно, что ее в сумме могут дать только нормальные напряжения σ . Так как растяжение всех волокон материала равномерное ($\varepsilon = \text{const}$), то по закону Гука (1) $\sigma = E\varepsilon$ должны быть одинаковыми и напряжения во всех точках сечения. Отсюда следует, что при растяжении и сжатии нормальные напряжения в поперечном сечении детали равны отношению продольной силы к площади поперечного сечения (24). При растяжении напряжения положительные, при сжатии – отрицательные.

2.2. Напряжения в наклонных сечениях



Рассечем деталь плоскостью под углом α от поперечного сечения. Площадь наклонного сечения $A_\alpha = A / \cos \alpha$.

Силу F , возникающую в наклонном сечении, разложим на нормальную $N_\alpha = F \cos \alpha$ и касательную $Q_\alpha = F \sin \alpha$ составляющие к сечению. Сила N_α является равнодействующей нормальных σ_α напряжений в наклонном сечении, Q_α – касательных τ_α напряжений.

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha \cos \alpha}{A} = \frac{F}{A} \cos^2 \alpha;$$

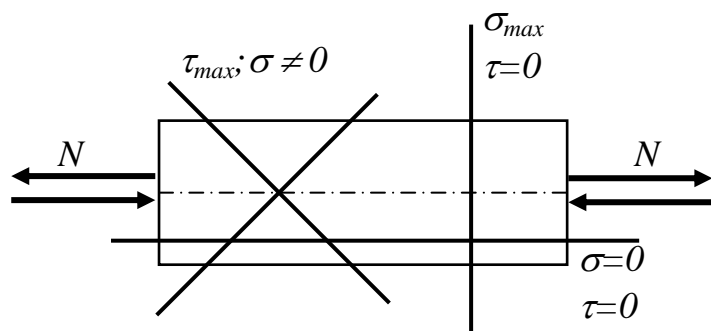
$$\tau_\alpha = \frac{Q_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F \cos \alpha \sin \alpha}{A} = \frac{F}{2A} \sin 2\alpha, \quad \text{с учетом (23):}$$

Определим экстремальные значения напряжений при растяжении и сжатии, анализируя формулы (25).

Нормальные напряжения достигают максимальных значений при $\alpha=0$ (в поперечных сечениях) и определяются формулой (24). Касательные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют. Следовательно, в поперечных сечениях возможно разрушение в виде разрыва.

В продольных сечениях (при $\alpha=90^\circ$) равны нулю и нормальные и касательные напряжения. Следовательно, продольные волокна материала между собой не взаимодействуют, что дает возможность при растяжении стержень сплошного сечения заменить гибким тросом такой же прочности.

Максимальные касательные напряжения (по величине в два раза меньше нормальных) возникают в сечениях под углом $\alpha=\pm 45^\circ$. Здесь при сжатии хрупких материалов происходит разрушение в виде сдвига. В этих сечениях отличны от нуля и нормальные напряжения.



Таким образом, наиболее опасными сечениями при растяжении и сжатии являются поперечные сечения детали, в которых возникают максимальные нормальные напряжения, определяемые по формуле (24).

Подставив в формулу (25) для касательных напряжений вместо α угол $\alpha+90^\circ$, получим

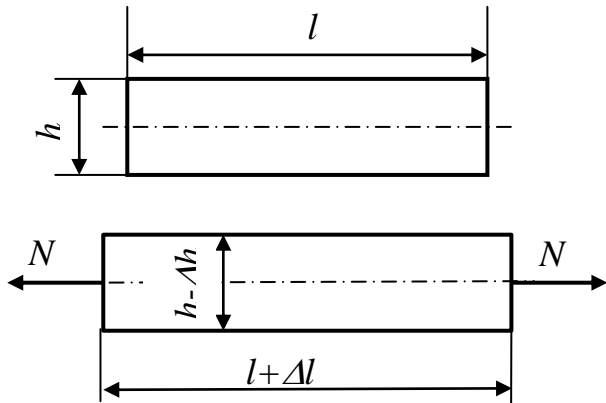
$$\tau_{\alpha+90^\circ} = 0,5 \sigma \sin 2(\alpha+90^\circ) = 0,5 \sigma \sin(2\alpha+180^\circ) = -0,5 \sigma \sin 2\alpha = -\tau_\alpha$$

$$\tau_{\alpha+90^\circ} = -\tau_\alpha \quad (26)$$

закон парности касательных напряжений

что носит название **закона парности касательных напряжений**: в любых взаимно перпендикулярных сечениях всегда возникают одинаковые касательные напряжения. Закон парности касательных

напряжений используется в теории напряженно-деформированного состояния.



2.3. Характеристики деформации

При растяжении и сжатии изменяются длина и поперечные размеры детали, форма остается неизменной. Поэтому характеристиками деформации будут являться:

Δl – абсолютное удлинение;

$\varepsilon = \Delta l / l$ – относительное удлинение (продольная деформация);

Δh – абсолютное изменение поперечного размера;

$\varepsilon_n = \Delta h / h$ – относительная поперечная деформация.

Характеристики деформации, как и напряжения, имеют свой знак. При увеличении размера характеристика деформация положительная, при уменьшении – отрицательная.

Продольную деформацию определяем из выражения закона Гука по

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE} \quad (27)$$

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{AE} \quad (28)$$

продольная деформация

нормальным напряжениям (23) с учетом (24).

E – одна из трех упругих постоянных материала, носит название *модуля упругости*. Значения модуля упругости приводятся в литературе. В частности, для всех марок стали можно принять $E \cong 2 \cdot 10^{11}$ Па.

$$\mu = -\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = \text{const} \quad (29)$$

коэффициент Пуассона

Поперечная деформация определяется через коэффициент Пуассона μ . Знак минус в (29) взят для того, чтобы сам коэффициент был положительным. Тогда из (29) с учетом (27) получаем формулы (30-31) для относительной и абсолютной поперечной деформации.

$$\varepsilon_n = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{N}{AE} \quad (30)$$

$$\Delta h = \varepsilon_n h = -\mu \frac{Nh}{AE} \quad (31)$$

поперечная деформация

Значение коэффициента Пуассона для сталей: $\mu = 0,28 \div 0,33$ (в расчетах обычно берется $\mu \cong 0,3$).

Знаменатель формул (27), (28), (30), (31), определяющих деформации при растяжении и

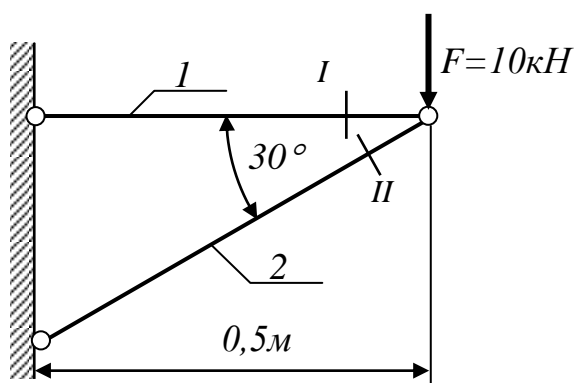
сжатии, один и тот же: $A \cdot E$. С его увеличением деформации уменьшаются, поэтому произведение AE является *характеристикой жесткости при растяжении и сжатии*.

Изменение размеров детали может происходить не только от силового воздействия на нее, но и при изменении температуры материала.

$$\Delta l_t = \alpha \Delta t \cdot l \quad (32)$$

температурная деформация

Температурная деформация определяется через *коэффициент температурного расширения* α материала, значения которого берутся из справочной литературы. Например, у стали $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}$ (1/град.).



Пример определения напряжений и деформаций

Определить напряжения и деформации в стержнях плоской фермы, изготовленной из стальных прутков круглого сечения диаметром $d = 20$ мм.

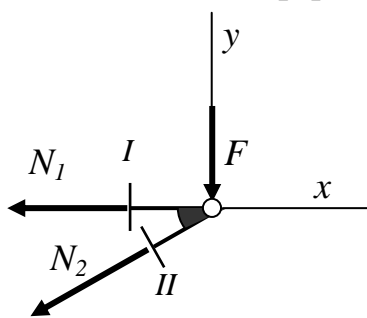
Решение

Вычислим длину стержней до нагружения и площадь поперечного сечения. Единицы измерения величин в системе СИ.

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 0,5 / \cos 30^\circ = 0,5 / 0,866 = 0,577 \text{ м.}$$

$$A = \pi d^2 / 4 = \pi (0,02)^2 / 4 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Определяем продольные силы в стержнях фермы методом сечений. Стержни рассекаем плоскостями I и II, перпендикулярными к их осям. Левую от сечений часть фермы отбрасываем. Для сохранения равновесия оставшейся части фермы в сечениях стержней прикладываем нормальные силы N_1 и N_2 в направлении от проведенных сечений.



Проводим произвольные, но обязательно взаимно перпендикулярные оси x и y , и составляем уравнения равновесия рассматриваемой части фермы:

$$\begin{cases} \Sigma X = -N_1 - N_2 \cos 30^\circ = 0; \\ \Sigma Y = -F - N_2 \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим:

$$N_2 = -F / \sin 30^\circ = -10 / 0,5 = -20 \text{ кН};$$

$$N_1 = -N_2 \cos 30^\circ = -(-20) \cdot 0,866 = +17,32 \text{ кН.}$$

По знакам продольных сил делаем вывод: первый стержень растянут, второй стержень работает на сжатие.

Вычисляем напряжения в стержнях по формуле (24)

$$\sigma_1 = N_1 / A_1 = +17,32 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 10^{-4}) = 5,52 \cdot 10^7 \text{ Па} = +55,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = N_2 / A_2 = -20 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot 10^{-4}) = -6,37 \cdot 10^7 \text{ Па} = -63,7 \text{ МПа.}$$

Вычисляем абсолютную деформацию стержней по формуле (28)

$$\Delta l_1 = N_1 l_1 / (A_1 E) = +17,32 \cdot 10^3 \cdot 0,5 / (3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}) = +1,38 \cdot 10^{-4} \text{ м} = +0,138 \text{ мм};$$

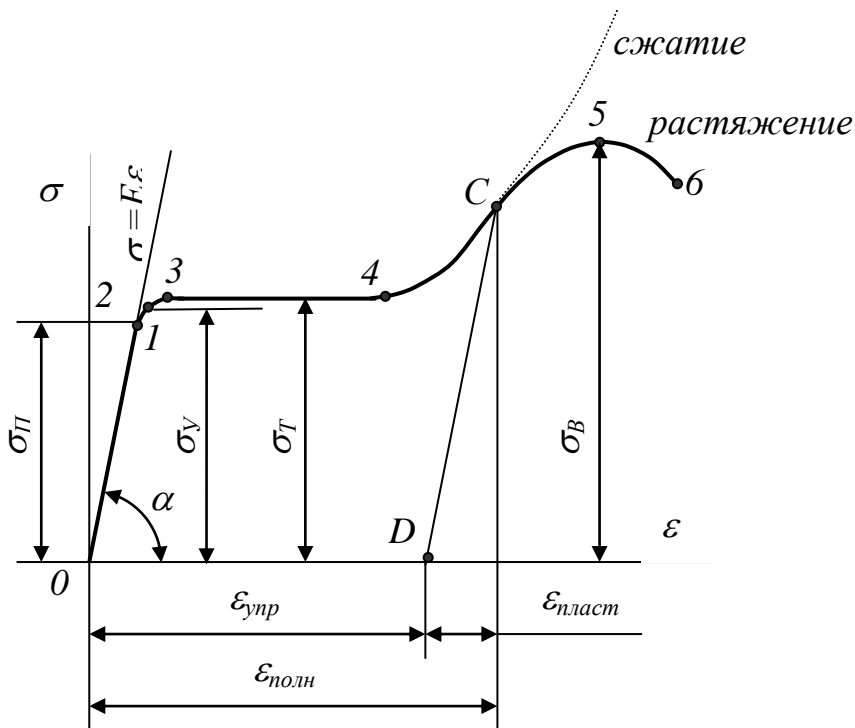
$$\Delta l_2 = N_2 l_2 / (A_2 E) = -20 \cdot 10^3 \cdot 0,577 / (3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}) = -1,84 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,184 \text{ мм},$$

то есть длина первого стержня увеличится на 0,138 мм, длина второго стержня уменьшится на 0,184 мм. Деформации при растяжении и сжатии малы.

2.4. Характеристики механических свойств материала

В расчетах на прочность и жесткость используются аналитические формулы и характеристики реальных материалов, которые получают экспериментально. Самым простым является испытание материалов на растяжение. Предварительно у образца измеряют длину l_0 и площадь поперечного сечения A_0 . Затем образец растягивается на испытательной машине до разрушения. При этом графически (обычно автоматически) фиксируется зависимость его удлинения Δl от величины продольной силы N . Полученный график в осях $\Delta l - N$ называется *диаграммой растяжения*. Численные значения диаграммы растяжения зависят не только от материала, но и от размеров образца. Чтобы исключить влияние размеров, производят линейное преобразование координатных осей. Вместо продольной силы N откладываются значения $N/A_0 = \sigma$ – условных напряжений, вместо удлинения Δl – *относительное удлинение* $\varepsilon = \Delta l/l_0$. Как известно, от линейного преобразования осей вид графика не изменится. Полученный график в осях $\varepsilon - \sigma$ носит название *условной диаграммы растяжения*, значения которой зависят только от свойств материала.

Условная диаграмма растяжения низкоуглеродистых сталей



Участок 0–1. Отрезок прямой линии. Напряжения прямо пропорциональны деформации $\sigma = E\varepsilon$, то есть материал следует закону Гука. Наибольшее значение напряжений, до которого выполняется закон Гука (в точке 1) называется *пределом пропорциональности* и материала σ_p .

Только в пределах пропорциональности применимы аналитические формулы сопротивления материалов. Значение модуля упругости материала E можно найти, как тангенс угла наклона α .

Участок 1–3: материал перестает подчиняться закону Гука. До точки 2 возникают только упругие деформации, исчезающие после снятия нагрузки. Наибольшее значение напряжений, до которого деформации носят только упругий характер, называется *пределом упругости материала* σ_y .

Участок 3–4: происходит значительный рост деформации без увеличения нагрузки. Это явление называется *текучестью материала*. Значение напряжений, при котором происходит это явление, носит название *предела текучести материала* σ_T . При текучести на полированной поверхности образца возникает сетка из линий под углом 45° к его оси. Это следы пластических сдвигов в материале от действия максимальных касательных напряжений (*линии сдвига*).

Участок 4–5: материал вновь приобретает способность воспринимать растущие напряжения (упрочнение материала за счет пластических деформаций). Это явление называется *наклепом материала* и широко используется в технике для повышения упругости ответственных деталей.

В точке 5 на образце в случайном месте возникает *шейка*. Напряжения достигают максимальной величины, прочность материала исчерпывается. Значение максимальных напряжений, которое выдерживает материал, называется *пределом прочности* σ_B .

Участок 5–6 соответствует в основном деформации в окрестности шейки. Площадь сечения быстро уменьшается, поэтому нагрузка падает.

В точке 6 происходит разрыв образца.

При испытании образца на сжатие получается идентичная диаграмма, отличающаяся от диаграммы растяжения на последнем участке: образец приобретает бочкообразную форму, и рост напряжений ограничивается только мощностью испытательной машины. Поэтому считается, что *пластичные материалы одинаково сопротивляются растяжению и сжатию*.

После разрыва образца вычисляют две характеристики его пластических свойств:

$$\delta = \frac{l_P - l_0}{l_0} \times 100\%$$

$$\psi = \frac{A_0 - A_{ш}}{A_0} \times 100\% \quad (33)$$

характеристики пластичности

относительное остаточное удлинение при разрыве δ и относительное сужение площади сечения ψ (33).

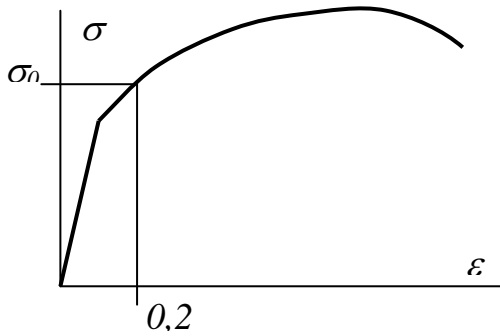
Если значения характеристик пластичности больше 5%, материал считается *пластичным*, если меньше 5% – материал *хрупкий*.

Низкоуглеродистые марки стали имеют значения $\delta=20\div 30\%$. Более объективна вторая характеристика, так как ее значение не зависит от места возникновения шейки.

Оценивая влияние напряжений на прочностные и деформационные свойства материала можно сделать важный вывод: *опасным напряжением для*

пластичных материалов следует считать **предел текучести σ_T** , вызывающий значительные пластические деформации.

Условные диаграммы растяжения легированных сталей и цветных сплавов

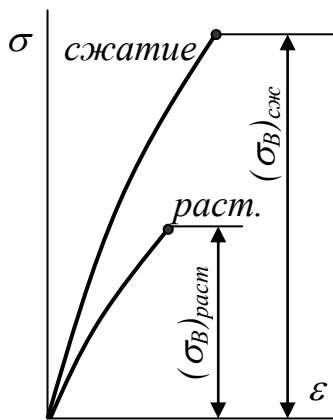


имеют одну особенность: отсутствует явно выраженная площадка текучести. А так как эти материалы пластичные, для которых основной прочностной характеристикой является предел текучести, то для них определяется *условный предел текучести $\sigma_{0,2}$* .

Условный предел текучести – это значение напряжений, соответствующее деформации $\varepsilon = 0,2\%$.

Условные диаграммы растяжения и сжатия хрупких материалов

имеют две особенности:



- 1) все без исключения хрупкие материалы на сжатие работают значительно лучше, чем на растяжение, поэтому диаграммы деформирования разные;
- 2) хрупкие материалы разрушаются при относительно малых деформациях.

*Опасным напряжением для хрупких материалов является **предел прочности σ_B** .*

2.5. Условие прочности при растяжении

$\sigma_{max} = N/A$
максимальные
напряжения в детали

При растяжении (и сжатии) максимальные напряжения возникают в поперечных сечениях и определяются отношением (24);

$\sigma_{опасн} = \begin{cases} \sigma_T \cdot \text{для} \cdot \text{пластичных} \cdot \text{материалов} \\ \sigma_B \cdot \text{для} \cdot \text{хрупких} \cdot \text{материалов} \dots \dots \end{cases}$
опасные напряжения

У материала существуют так называемые опасные напряжения, допускать появление которых в реальных конструкциях

нельзя.

Вполне логично было бы сформулировать условие прочности так: деталь прочна, если напряжения в ней меньше опасных напряжений для данного материала, то есть $\sigma_{max} < \sigma_{опасн}$. Но такое условие в расчетах применять нельзя: во-первых, левая часть неравенства – величина очень неточная (попробуйте определить точное значение напряжений в какой-нибудь детали); во-вторых, правая часть неравенства – экспериментальная величина, которой свойственен статистический разброс; в-третьих, сам знак неравенства вызывает вопрос – меньше, но насколько?

Поэтому, чтобы «обезопасить» сам расчет вместо опасных напряжений берется их уменьшенное значение, которое называется *допускаемым напряжением* (34) и обозначается $[\sigma]$.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{опасн}}{n} \quad (34)$$

допускаемые напряжения:
для пластичных материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T};$$

для хрупких материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n_B}$$

Величина $n > 1$ носит название *коэффициента запаса прочности*. Для пластичных материалов коэффициент запаса прочности принимается $n_T \cong 1,5$, для хрупких материалов $n_B \geq 2,5$. Различие в значениях объясняется разной тяжестью последствий при ошибке в расчетах.

Значения допускаемых напряжений при различных нагрузках содержатся в справочной литературе и являются нормативами при расчетах на прочность.

Тогда *условие прочности при действии нормальных напряжений* примет вид (35). Его можно использовать при любом виде деформаций, когда возникают нормальные напряжения.

расчетах на прочность.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma] \quad (35)$$

условие прочности по
нормальным напряжениям

Подставив вместо σ_{max} их значения при растяжении (24), получим *условие прочности при растяжении* (36), которое является основой расчетов на прочность всех деталей, работающих на растяжение. Здесь $[\sigma]_p$ – величина допускаемого напряжения для материала на растяжение.

$$\frac{N}{A} \leq [\sigma]_p \quad (36)$$

условие прочности
при растяжении

Здесь $[\sigma]_p$ – величина допускаемого напряжения для материала на растяжение.

Здесь $[\sigma]_p$ – величина допускаемого напряжения для материала на растяжение.

2.6. Типы расчетов на прочность

Целью *проектировочного расчета* является определение необходимых *размеров детали*. Для проектировочного расчета необходимо:

- определить нагрузку N , действующую на деталь;
- выбрать материал (обычно по существующим прототипам) и найти в справочных таблицах значение допускаемого напряжения $[\sigma]_p$;
- выбрать рациональную форму сечения детали, подставить в условие прочности (36) выражение площади через размеры сечения и из полученного неравенства вычислить размеры сечения.

Расчет поверочный производится при известных размерах, нагрузке и материале и сводится к проверке выполнения самого неравенства *условия прочности*. Вычисляются значение фактических напряжений в детали $\sigma_{max} = N/A$ и сравниваются с величиной допускаемого напряжения $[\sigma]_p$. Оптимальным считается соотношение между этими величинами в пределах $\pm 5\%$.

Расчет несущей способности конструкции состоит в определении максимального значения нагрузки для данной конструкции, то есть $N_{max} = A \cdot [\sigma]_p$.

Пример расчета на прочность при растяжении

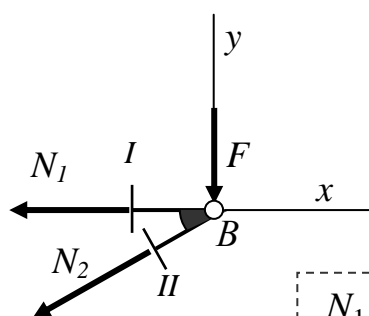
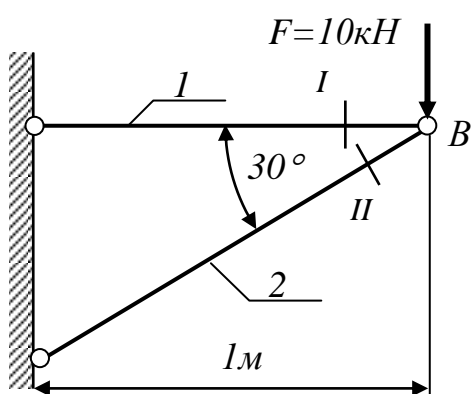
Определить необходимые размеры круглого сечения стержней плоской фермы. Материал стержней – сталь Ст3.

Решение

Определяем продольные силы в стержнях методом сечений. Вырезаем узел В, проставляем в сечениях стержней продольные силы N_1 и N_2 (от сечений) и находим их значения из уравнений равновесия узла:

$$\begin{cases} \Sigma X = -N_1 - N_2 \cos 30^\circ = 0; \\ \Sigma Y = -F - N_2 \sin 30^\circ = 0. \end{cases}$$

$N_2 = -20 \text{ кН}$; $N_1 = +17,32 \text{ кН}$. Первый стержень работает на растяжение, второй – на сжатие. В условие прочности (36) растянутого стержня 1 подставляем выражение площади круга $A_1 = \pi d^2 / 4$ и из полученного неравенства определяем диаметр сечения первого стержня:



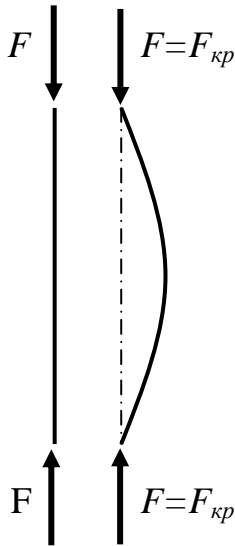
$$\frac{N_1}{A_1} \leq [\sigma]_p \quad d_1 \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi[\sigma]_p}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 17,32 \cdot 10^3}{\pi \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0133 \text{ м} = 13,3 \text{ мм}.$$

где $[\sigma]_p = 125 \text{ МПа}$ для стали Ст3.

Полученное значение диаметра округляем до стандартного из ряда нормальных линейных размеров: $d_1 = 14 \text{ мм}$.

Рассчитать на прочность сжатый стержень 2 пока мы не можем, так как условие прочности (36) не учитывает возможности потери устойчивости и для сжатых стержней большой длины неприменимо.

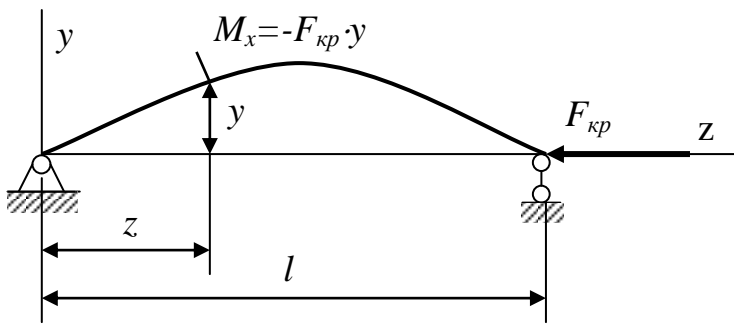
Тема 3. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ



В процессе сжатия стержня при относительно малых значениях сжимающей силы ось стержня остается прямой. При достижении силой определенного значения происходит внезапный изгиб стержня *потеря устойчивости*.

Из-за своей внезапности потеря устойчивости является опасным видом разрушения. Значение продольной силы, при котором происходит потеря устойчивости, называется *критической силой* $F_{кр}$, а напряжения в этот момент $\sigma_{кр} = F_{кр}/A$ – *критическими напряжениями*. Критических значений сил и напряжений в конструкциях допускать нельзя, следовательно, эти значения нужно уметь предварительно вычислять.

3.1. Продольный изгиб в пределах пропорциональности



Из теории изгиба известно, что изогнутая ось стержня описывается дифференциальным уравнением $y'' = \frac{M_x}{EI_x}$, где $M_x = -F_{кр} \cdot y$ – величина изгибающего момента в произвольном сечении стержня

(см. тему 5).

После подстановки изгибающего момента и обозначения (*) получим дифференциальное уравнение $y'' + k^2 y = 0$ – второго порядка, линейное, с постоянными коэффициентами, однородное. Его общий интеграл $y = A \cdot \text{Sink}z + B \cdot \text{cos}kz$, где A и B – постоянные, определяемые из начальных условий. На опорах стержня прогиб отсутствует, поэтому

при $z=0$ $y=0=A \cdot \text{Sin}0 + B \cdot \text{Cos}0$, откуда следует, что $B=0$;

при $z=l$ $y=0=A \cdot \text{Sink}l$, откуда следует, что $kl=n\pi$, где $n=0;1;2;\dots$, или $k=n\pi/l$.

$$k = \frac{n\pi}{l} \quad (**)$$

$$F_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{l^2} \quad (***)$$

$$y = A \text{Sin} \frac{n\pi}{l} z \quad (37)$$

Приравнивая выражения (*) и (**), получаем формулу (***) для

определения критической силы при двухшарнирном закреплении стержня (формула Эйлера). Уравнение изогнутой оси стержня при потере устойчивости примет вид синусоиды (37). Анализ формулы (***) для критической силы показывает:




в качестве момента инерции сечения I_x следует брать его минимальное главное значение I_{min} ;

критическое значение сжимающей силы не одно, а бесконечный ряд, каждому из которых соответствует своя форма изогнутой оси стержня в зависимости от значения числа n ;

число n равно количеству полуволн синусоиды на изогнутой оси стержня при потере устойчивости (см. таблицу);

значения числа $n=0$ следует исключить, как противоречащее здравому смыслу;

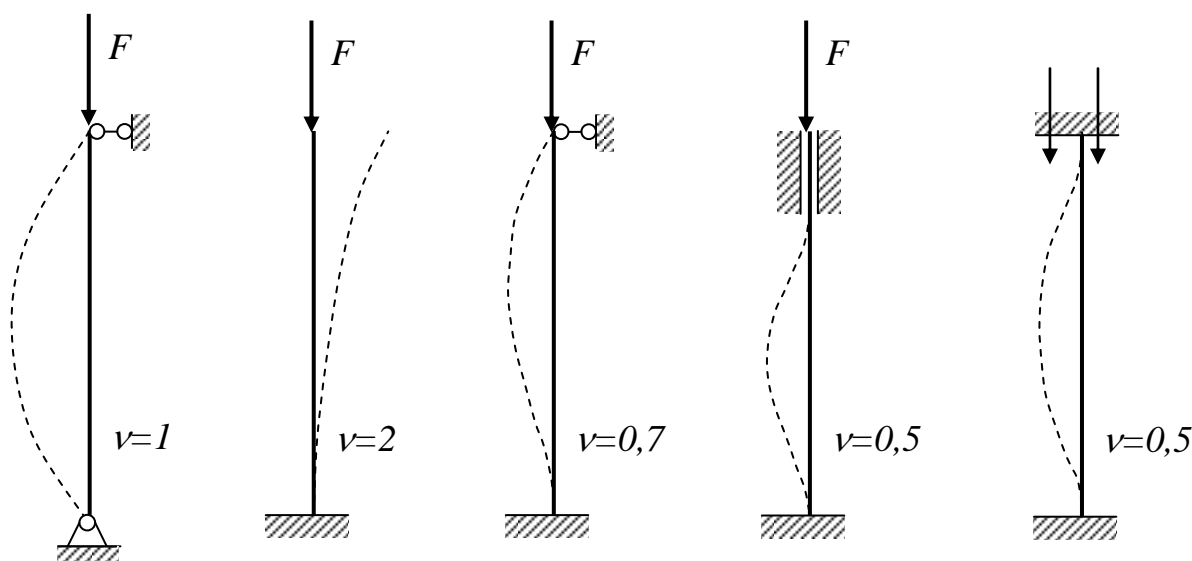
формы изогнутой оси стержня при $n \geq 2$ возможны только при наличии дополнительных промежуточных опор у сжатого стержня, но если они отсутствуют, следует принимать значение $n=1$.

n	$F_{кр}$	Изогнутая ось стержня	
		уравнение	график
0	0	$y=0$	
1	$(\pi^2 EI_{min})/l^2$	$y=A \cdot \sin(\pi z/l)$	
2	$(4\pi^2 EI_{min})/l^2$	$y=A \cdot \sin(2\pi z/l)$	

$$F_{кр} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{min}}{(\nu l)^2} \quad (38)$$

универсальная формула Эйлера для критической силы

Универсальная формула Эйлера для любого способа закрепления стержня имеет вид (38), где νl – приведенная длина стержня (длина полуволны синусоиды на изогнутой оси стержня); ν – коэффициент приведения длины показывает, какая часть длины стержня принимает вид полуволны синусоиды при потере устойчивости.



Из формулы Эйлера следуют два важных практических вывода.

1. Материал оказывает влияние на значение критической силы только через модуль упругости E , а так как для всех марок стали $E \cong 2 \cdot 10^{11} \text{ Па} = \text{const}$, то для изготовления сжатых стержней нужно использовать дешевые марки низкоуглеродистой стали ($Cm2$, $Cm3$).

2. Сечение сжатых деталей должно иметь равные главные моменты инерции (круг, квадрат, правильные многоугольники) и при минимальном расходе материала (площади сечения) значения моментов инерции должны быть по возможности наибольшими (трубы круглые и квадратные).

Критические значения напряжений при потере устойчивости

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\nu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (39)$$

формула Эйлера для критических напряжений

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}} \quad (40)$$

гибкость сжатого стержня

$$\lambda > \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\Pi}}} \quad (41)$$

$$\lambda > \begin{cases} 100 - \text{для стали} \\ 100 - \text{для дерева} \\ 80 - \text{для чугуна} \end{cases}$$

формулами Эйлера пользоваться можно

Значение *гибкости* занимает очень важное место в расчете сжатых стержней.

Так как формулы Эйлера (38) и (39) получены теоретически, то есть на основании закона Гука, применять их можно только при напряжениях, меньших значения предела пропорциональности материала $\sigma_{кр} < \sigma_{\Pi}$ или

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{\Pi}, \text{ откуда получаем значения}$$

гибкости (41), при которых формулы Эйлера справедливы.

Например, для стали $Cm3$ ($\sigma_{\Pi} \cong 200 \text{ МПа}$) получим значение гибкости $\lambda > 100$. Аналогично можно получить минимальные значения гибкости и для других материалов. При

меньших значениях гибкости применять формулы Эйлера нельзя.

3.2. Потеря устойчивости за пределами пропорциональности

Если критические напряжения превышают предел пропорциональности материала (закон Гука не соблюдается), то применять формулы Эйлера нельзя.

Экспериментально установлено, что при значениях гибкости, меньших

$$\lambda < \begin{cases} 40 - \text{для стали} \\ 30 - \text{для дерева} \\ 20 - \text{для чугуна} \end{cases}$$

потеря устойчивости не происходит

некоторых значений, стержни потерять устойчивость вообще не могут (короткие стержни). Поэтому они должны рассчитываться только на прочность без учета потери устойчивости.

- 40 <math>\lambda < 100</math> – сталь
- 30 <math>\lambda < 100</math> – дерево
- 20 <math>\lambda < 80</math> – чугун

нужно применять формулу Ясинского

При средних значениях гибкости в расчетах используется эмпирическую формулу Ясинского (42), где a, b, c – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала.

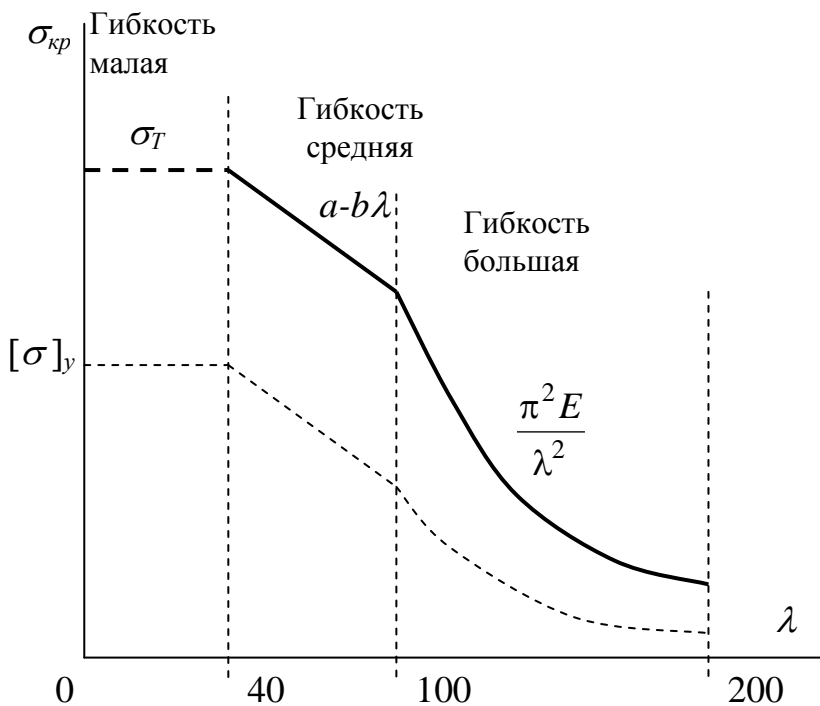
$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2;$$

$$F_{кр} = A \cdot (a - b\lambda + c\lambda^2) \quad (42)$$

Формула Ясинского

для стали Ст2 – $a=264$ МПа, $b=0,70$ МПа, $c=0$;
 для стали Ст3 – $a=310$ МПа, $b=1,14$ МПа, $c=0$.

3.3. График критических напряжений на примере стали Ст3



При малых значениях гибкости понятие критических напряжений отсутствует, но напряжения нужно ограничить опасным напряжением – пределом текучести материала.

При средних значениях гибкости критические напряжения определяются по формуле Ясинского.

Для стержней большой гибкости справедлива формула Эйлера.

Таким образом, величина опасного напряжения при сжатии $\sigma_{опасн} = \sigma_{кр}$ переменная, следовательно, переменной будет и величина допускаемого напряжения на устойчивость $[\sigma]_{уст}$.

3.4. Условие прочности и устойчивости при сжатии

В расчете на сжатие необходимо учитывать и прочностные характеристики материала, и возможность потери устойчивости. Поэтому должно выполняться неравенство $\sigma_{max} \leq [\sigma]_{уст}$, где левая часть $\sigma_{max} = |N|/A$ – абсолютное значение напряжений в сжатой детали, правая часть – значение допускаемых напряжений с учетом потери устойчивости $[\sigma]_{уст} = \sigma_{кр} / n_{уст}$. Величину допускаемых напряжений на устойчивость $[\sigma]_{уст}$ представим в виде произведения двух сомножителей: допускаемого напряжения на чистое сжатие $[\sigma]_{сж} = \sigma_T / n_T$ (величина постоянная, зависящая только от прочностных свойств

материала) и коэффициента $\varphi \leq 1$, уменьшающего величину допускаемого напряжения с учетом потери устойчивости, то есть $[\sigma]_{уст} = \varphi \cdot [\sigma]_{сж}$.

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр} \cdot n_T}{\sigma_T \cdot n_{уст}} \quad (43)$$

коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения

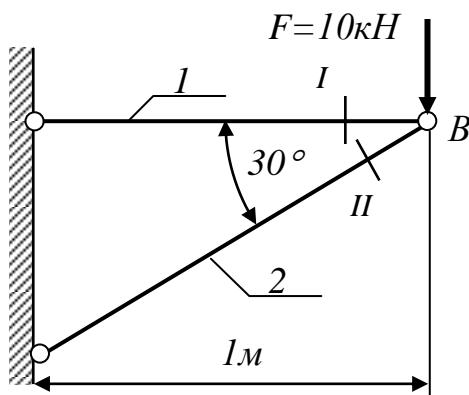
$$\frac{|N|}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]_{сж} \quad (44)$$

условие прочности и устойчивости

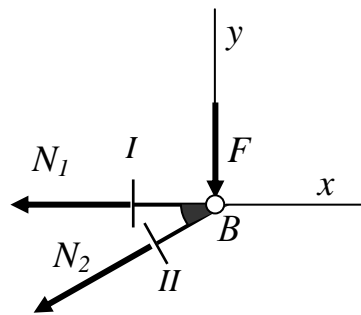
Тогда условием и прочностью, и устойчивости сжатого стержня будет являться неравенство (44), в котором коэффициент

φ берется из справочных таблиц по значению гибкости λ .

Так как в условии (44) два неизвестных A и φ , то расчет приходится вести способом последовательных приближений.



Пример расчета на устойчивость



Продолжим расчет фермы, начатый в предыдущей теме.

Расчет сжатого стержня 2. $N_2 = -20$ кН.

Для круглого сечения $A = \pi d^2 / 4$;

$I_{min} = \pi d^4 / 64$; $I_{min} = d^4 / 4$, тогда гибкость сжатого стержня при двухшарнирном закреплении ($\nu=1$) $\lambda = 4 \cdot l_2 / d$, где длина второго стержня $l_2 = 1 / \cos 30^\circ = 1 / 0,866 = 1,15 \text{ м} = 1150 \text{ мм}$.

$$\frac{|N|}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]_{сж}$$

Из условия устойчивости (44)

$$d \geq \sqrt{\frac{4|N_2|}{\pi \varphi \cdot [\sigma]_{сж}}}$$

Для стали Ст3 (материал пластичный) $[\sigma]_{сж} = [\sigma]_p = 125 \text{ МПа}$.

В неравенстве два неизвестных, решаем способом последовательных приближений.

Первый шаг приближений. Задаем произвольное значение φ , например, $\varphi_1 = 0,6$.

Вычисляем значение диаметра сечения

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,6 \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0184 \text{ м}$$

Округляем до стандартного значения $d = 19 \text{ мм}$.

Вычисляем значение гибкости $\lambda = 4 \cdot l_2 / d = 4 \cdot 11500 / 19 = 242$.

По таблице находим соответствующее значение $\varphi_1^* \cong 0$.

Оцениваем погрешность первого шага приближений

$$\Delta = (\varphi_1 - \varphi_1^*) / \varphi_1 \times 100\% = (0,6 - 0) / 0,6 \times 100 = 100\%$$

Ошибка значительная ($>5\%$), поэтому расчет повторяем при значении

$$\varphi_2 = \varphi_{cp} = (\varphi_1 + \varphi_1^*)/2 = (0,6 + 0)/2 = 0,3.$$

Второй шаг приближений. $\varphi_2 = 0,3$.

$$\text{Диаметр сечения } d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,3 \cdot 12510^6}} = 0,0261 \text{ м.}$$

Округляем $d = 28 \text{ мм}$.

$$\text{Гибкость } \lambda = 4 \cdot l_2/d = 4 \cdot 11500/28 = 164.$$

Значение коэффициента $\varphi_1^* \approx 0,28$.

$$\text{Погрешность второго шага } \Delta = (\varphi_2 - \varphi_2^*)/\varphi_2 \times 100\% = (0,3 - 0,28)/0,3 \times 100 = 7\%.$$

Третий шаг приближений. $\varphi_3 = (0,3 + 0,28)/2 = 0,29$.

$$\text{Диаметр сечения } d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,29 \cdot 12510^6}} = 0,0265 \text{ м.}$$

Округляем $d = 28 \text{ мм}$.

$$\text{Гибкость } \lambda = 4 \cdot l_2/d = 4 \cdot 11500/28 = 164.$$

Значение коэффициента $\varphi_3^* \approx 0,28$.

$$\text{Погрешность второго шага } \Delta = (\varphi_3 - \varphi_3^*)/\varphi_3 \times 100\% = (0,29 - 0,28)/0,29 \times 100 = 3\%.$$

На этом способ последовательных приближений заканчиваем с результатом $d = 28 \text{ мм}$, $\lambda = 164$.

Проверяем второй стержень по коэффициенту запаса устойчивости $n_y = N_{кр}/|N_2|$, значение которого должно быть в пределах $[n]_y = 1,8 \div 3,0$.

Для вычисления критической силы используем формулу Эйлера ($\lambda > 100$):

$$N_{\text{Эй}} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{(vl)^2} = \frac{n^2 \pi^2 E \pi d^4}{(vl)^2 \cdot 64} = \frac{1 \cdot \pi^3 2 \cdot 10^{11} \cdot (0,028)^4}{(1 \cdot 1,15)^2 \cdot 64} = 45,0 \cdot 10^3 \text{ Ё} = 45 \text{ ё}.$$

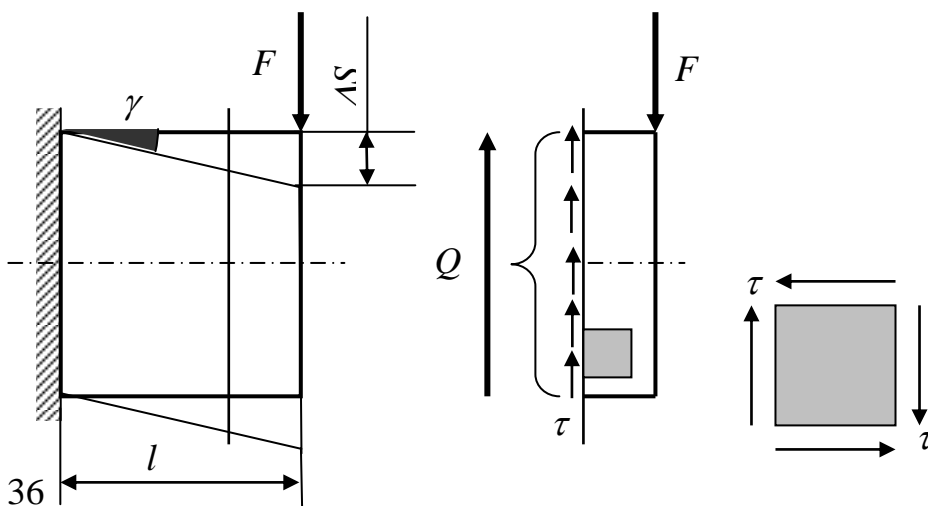
Значение коэффициента запаса устойчивости

$$n_y = N_{кр}/|N_2| = 45/20 = 2,25$$

соответствует нормативу.

Тема 4. ПРОЧНОСТЬ ПРИ СРЕЗЕ И СМЯТИИ

Сдвигом (срезом) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении детали возникает только поперечная сила Q .



Очевидно, поперечная сила Q может являться равнодействующей только касательных напряжений τ . Если приближенно принять, что величина касательных

напряжений во всех точках сечения постоянна, то их можно найти, поделив поперечную силу на площадь среза (45). Тогда условием прочности детали при срезе будет являться выполнение неравенства (46).

$$\tau \approx \frac{Q}{A_{cp}} \quad (45)$$

напряжения при срезе

$$\frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau]_{cp} \quad (46)$$

условие прочности при срезе

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GA_{cp}} \quad (47)$$

угол сдвига

Деформацию при сдвиге характеризуют две величины: *абсолютный сдвиг* ΔS и *угол сдвига* γ .

Значение угла сдвига получим из выражения закона Гука (1) по касательным напряжениям (47). Абсолютный сдвиг определяем через угол сдвига с учетом его малости

$$\Delta S = tg \gamma \cdot l \approx \gamma \cdot l \quad (48)$$

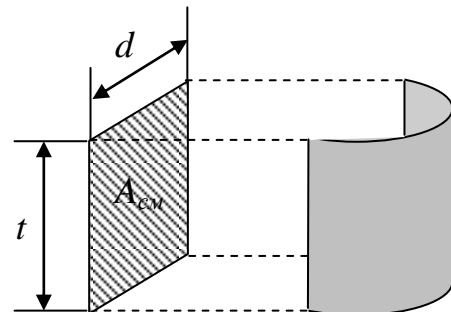
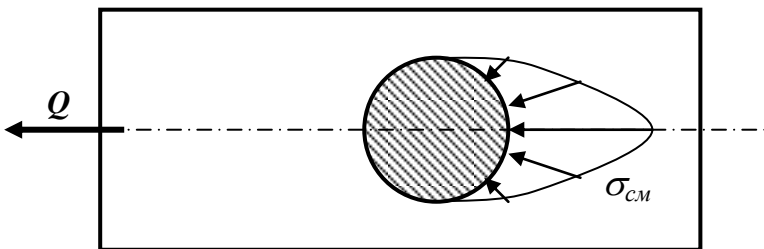
абсолютный сдвиг

Величина G является упругой постоянной материала и носит название *модуля сдвига*, характеризует жесткость материала

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (49)$$

зависимость между тремя упругими константами материала

при действии касательных напряжений. Значение модуля сдвига для стали $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па, для других материалов можно определить исходя из зависимости между тремя упругими константами материала (49) через модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ .



$$(\sigma_{cm})_{max} \approx \frac{Q}{A_{cm}} \quad (50)$$

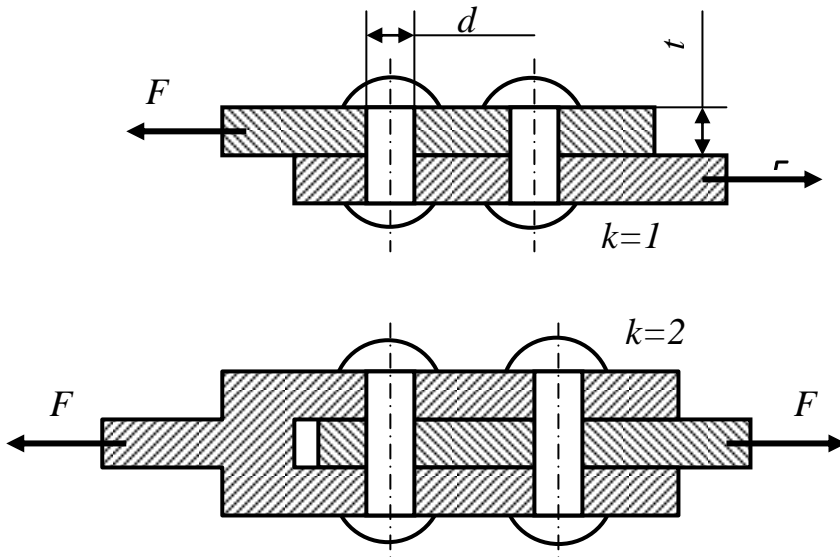
$$\frac{Q}{A_{cm}} \leq [\sigma]_{cm} \quad (51)$$

условие прочности при смятии

Работа деталей на срез сопровождается *смятием* поверхностей их контакта от действия нормальных напряжений смятия σ_{cm} .

Максимальное значение напряжений смятия приближенно равно отношению силы к *площади проекции поверхности смятия* деталей: $A_{cm} = d \cdot t$. Тогда *условие прочности при смятии* будет иметь вид (51).

Пример расчета на прочность заклепочного (болтового) соединения



Введем обозначения:
 t – толщина соединяемых листов;
 d – диаметр заклепки;
 m – количество заклепок (болтов);
 k – число плоскостей среза в одной заклепке (болте).

Диаметр заклепки (болта) назначается конструктором из стандартного ряда значений в зависимости от толщины

листов: от соединения не требуется герметичность – $d \approx 2t$; соединение должно быть герметичным – $d \approx t$.

Расчет на срез. В условие прочности при срезе (46) подставляем выражения срезающей силы $Q=F$ и площади среза всех заклепок (болтов) $A_{ср} = (\pi d^2/4) \cdot k \cdot m$. Из полученного выражения определяем необходимое число заклепок (болтов) (*).

$$m \geq (4F) / (\pi d^2 k [\tau]_{ср}) \quad (*)$$

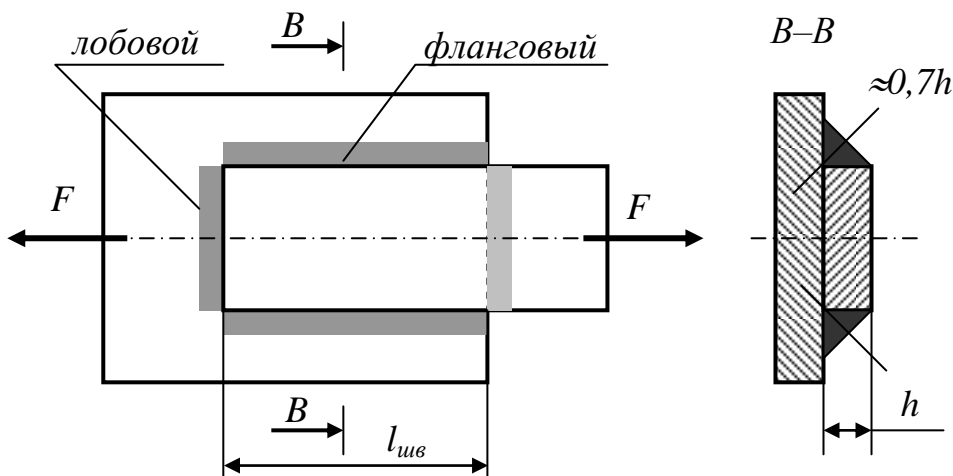
Полученное значение округляем в большую сторону до целого числа.

Расчет на смятие. Подставляем в условие прочности при смятии (51) $Q=F$ и $A_{см} = d \cdot t \cdot m$ и из полученного неравенства выражаем число заклепок (болтов) (**).

$$m \geq F / (d t [\sigma]_{см}) \quad (**)$$

Округляем в большую сторону. Из двух значений (*) и (**) окончательно принимаем большее.

Пример расчета сварного соединения «внахлестку»



Соединение «внахлестку» может выполняться швами фланговыми (параллельными нагрузке) и лобовыми (перпендикулярными нагрузке).

Шов в сечении считается равнобедренным треугольником. Катет шва h принимается равным или на 1–2мм меньшим толщины соединяемых листов. Разрушение шва прогнозируется по линии его наименьшей толщины ($\approx 0,7h$ – по биссектрисе). Рассчитываемой величиной обычно является необходимая длина шва $l_{шв}$.

Расчет фланговых швов. Для симметрии нагружения фланговые швы накладываются парами. Шов работает на срез. В условие прочности при срезе (46) подставим выражения $Q=F$ и $A_{ср}=(0,7h) \cdot 2 \cdot l_{шв}$ и определим необходимую

длину шва. К полученной величине добавим ≈ 10 мм на непровар шва в начале и в конце. Значения допускаемого напряжения для шва можно принять следующие: $[\tau]_{\text{ср}}=80$ МПа при ручной сварке и $[\tau]_{\text{ср}}=110$ МПа при автоматической.

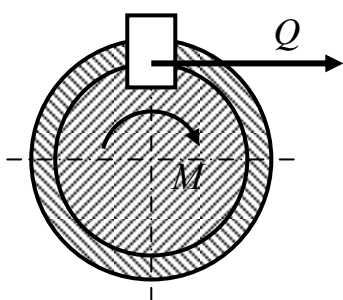
Лобовые швы испытывают сложный вид деформации: одновременное действие растяжения и среза. В приближенных расчетах учитывается только срез, поэтому расчетная формула будет такой же, как и для фланговых швов (*).

Пример расчета соединения вала со ступицей (муфтой)

Соединение вала со ступицей может иметь множество конструктивных решений (штифт, шпонка, шлицы, сварной шов и т.д.), но расчет соединяющего элемента на срез и смятие не имеет принципиальных отличий от рассмотренных примеров.

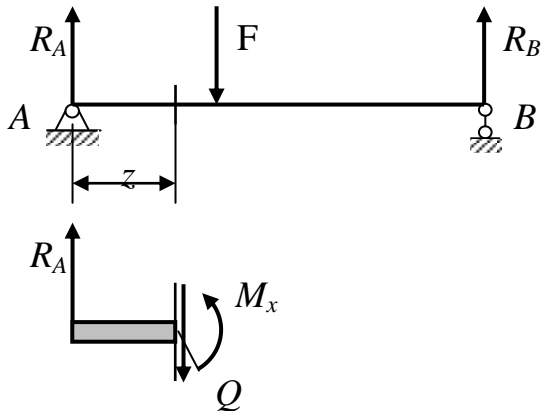
Срезающая сила определяется через величину передаваемого момента и равна окружному усилию на поверхности вала:

$$Q=M/R.$$



Тема 5. ПЛОСКИЙ ИЗГИБ

Изгибом называется такой вид деформации, при котором в сечении детали возникают изгибающие моменты M_x и M_y . Если присутствуют оба момента, изгиб называется *пространственным*, если отличен от нуля только один из них – изгиб *плоский*. Деталь, работающая на изгиб, называется *балкой*.

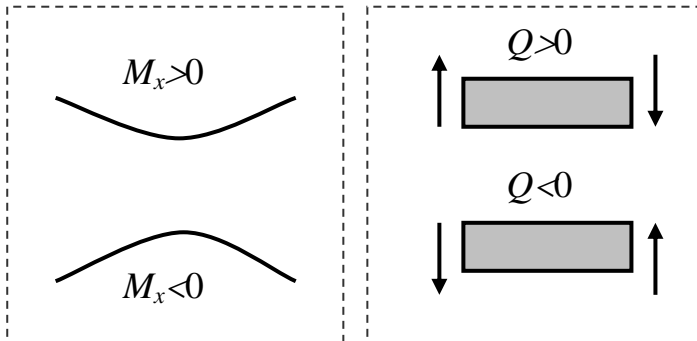


5.1. Внутренние силовые факторы при плоском изгибе

Рассмотрим балку, находящуюся под действием внешней силы F . Отбросим опоры, заменив их реакциями R_A и R_B . Рассечем балку на две части и рассмотрим условия равновесия одной из частей. Отсюда следует, что в сечении балки кроме изгибающего момента M_x

должна присутствовать и поперечная сила Q . Такой изгиб называется *поперечным изгибом*. Если в сечении балки поперечная сила равна нулю, изгиб называется *чистым*. Сила Q является признаком деформации сдвига, следовательно, поперечный изгиб является сложным видом деформации, состоящей из чистого изгиба и сдвига.

Введем следу-



ющие правила знаков для изгибающего момента и поперечной силы. *Изгибающий момент M_x будем считать положительным, если его действие дает положительную кривизну изогнутой оси балки (выпуклостью вниз). Поперечную силу Q будем считать положительной, если она стремится вращать отсеченную часть балки по ходу часовой стрелки.*

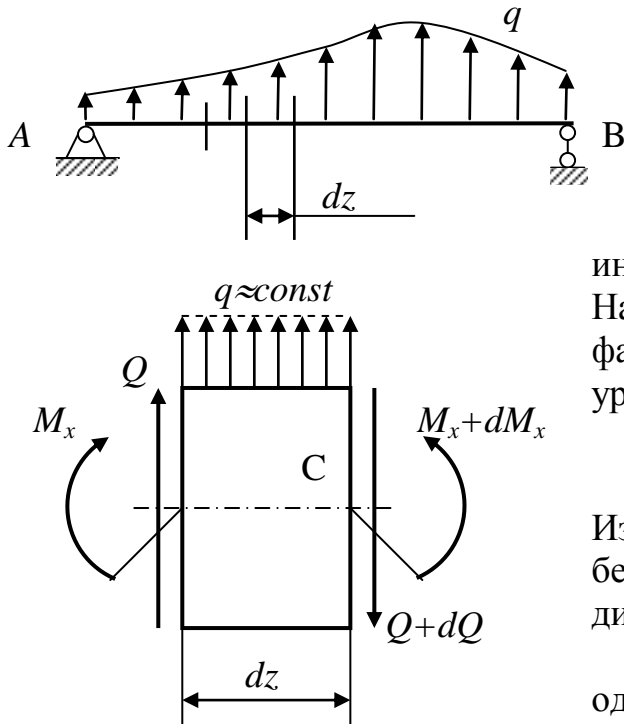
Для определения изгибающего момента и поперечной силы используется метод сечений. Так как изгибающий момент и поперечная сила в сечении должны уравнивать соответственно внешние моменты и силы, лежащие по одну сторону от сечения, то:

$$M_x = \sum M_{\text{слева}} = \sum M_{\text{справа}}$$

$$Q = \sum Q_{\text{слева}} = \sum Q_{\text{справа}}$$

- *изгибающий момент M_x в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех поперечных сил, лежащих по одну сторону от этого сечения;*
- *поперечная сила Q в любом сечении балки равна алгебраической сумме проекций на поперечное направление всех сил, лежащих по*

одну сторону от этого сечения.



$$Q = \frac{dM_x}{dz};$$

$$q = \frac{dQ}{dz}.$$

дифференциальные зависимости при изгибе

(52)

и будем пользоваться в дальнейших расчетах.

$$Q = \pm \frac{dM_x}{dz};$$

плюс – для левой части балки;
минус – для правой части балки.

(53)

Из балки, находящейся под действием произвольно распределенной нагрузки q , выделим элемент бесконечно малой длины dz . Бесконечно малая длина элемента дает основание считать

интенсивность нагрузки неизменной. Нанесем в сечениях внутренние силовые факторы (положительные) и составим уравнения равновесия элемента:

$$\sum Y = Q - Q - dQ + q \cdot dz = 0;$$

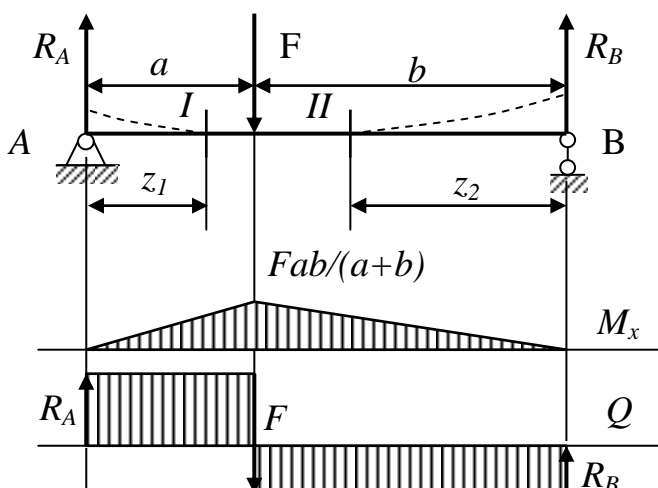
$$\sum M_C = -M_x + M_x + dM_x - Q \cdot dz - q \cdot dz \cdot dz/2 = 0.$$

Из уравнений равновесия, пренебрегая бесконечно малым слагаемым, получим дифференциальные зависимости (52).

Первое соотношение (52) дает еще один способ определения поперечной силы в сечении как производной от

Расчет балки на прочность проводится по *опасным сечениям*. В опасных сечениях напряжения и, следовательно, внутренние силовые факторы достигают максимальных значений. Проще всего определить положение опасных сечений по графикам изменения внутренних силовых факторов по длине балки – *эпюрам изгибающего момента и поперечной силы*.

Рассмотрим несколько примеров построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для различных видов нагружения.



Пример 1. Балка двухопорная под действием поперечной силы

Определим реакции в опорах. Проще всего это сделать, составив уравнения моментов сил относительно опор, так как в каждое из уравнений войдет только одна неизвестная. Знаки моментов

ставим в соответствии с правилами теоретической механики.

$$\Sigma M_A = -F \cdot a + R_B(a+b) = 0;$$

$$\Sigma M_B = +F \cdot b - R_A(a+b) = 0.$$

Отсюда значения реакций: $R_B = Fa/(a+b)$; $R_A = Fb/(a+b)$.

Проверяем правильность вычислений, составив уравнение проекций сил,

$$\Sigma Y = R_A + R_B - F = Fb/(a+b) + Fa/(a+b) - F = F[(b+a-a-b)/(a+b)] = 0.$$

Разбиваем длину балки на участки I и II. Под участком будем понимать отрезок балки без изменения внешней нагрузки. Применяем метод сечений на каждом участке.

Участок I. Отбрасим правую от сечения часть как более сложную (закроем ее листом бумаги). Длину левой оставшейся части обозначим z_1 , которая меняется на данном участке в пределах $0 \leq z_1 \leq a$. Составим уравнение внутреннего изгибающего момента, суммируя моменты всех сил слева от сечения (знаки ставим по кривизне изгиба): $M_{x1} = +R_A \cdot z_1$. Получили уравнение прямой линии, график которой строим по двум значениям на границах участка: при $z_1 = 0$ $M_{x1} = 0$ – первая точка; при $z_1 = a$ $M_{x1} = +R_A \cdot a = Fab/(a+b)$ – вторая точка. Положительные ординаты откладываем вверх от нулевой линии. Полученный график штрихуем вертикальными линиями. Поперечная сила на первом участке (53) $Q_1 = dM_{x1}/dz_1 = +R_A = const$ – график положительной константы.

Участок II. Проведя сечение, отбросим (закроем) левую часть. Длина правой оставшейся части z_2 , где $0 \leq z_2 \leq b$. Уравнение изгибающего момента $M_{x2} = +R_B \cdot z_2$ (знак по кривизне изгиба) – прямая линия, график которой строим по двум значениям на границах участка: при $z_2 = 0$ $M_{x2} = 0$; при $z_2 = b$ $M_{x2} = +R_B \cdot b = Fab/(a+b)$. Поперечная сила $Q_2 = -dM_{x2}/dz_2 = -R_B = const$ – отрицательная константа.

По построенным эпюрам можно сделать вывод, что опасное сечение балки расположено в месте приложения силы F .

Отметим, что эпюра изгибающего момента не имеет разрывов, на эпюре поперечной силы разрывы (скачки) находятся в точках приложения сосредоточенных сил. При отсутствии распределенной нагрузки ($q=0$) эпюра поперечной силы – константа, эпюра момента – наклонная прямая, что соответствует дифференциальным зависимостям (52).

Пример 2. Балка двухопорная под действием равномерно распределенной нагрузки $q = const$

Определяем реакции в опорах, заменив распределенную нагрузку ее равнодействующей ql .

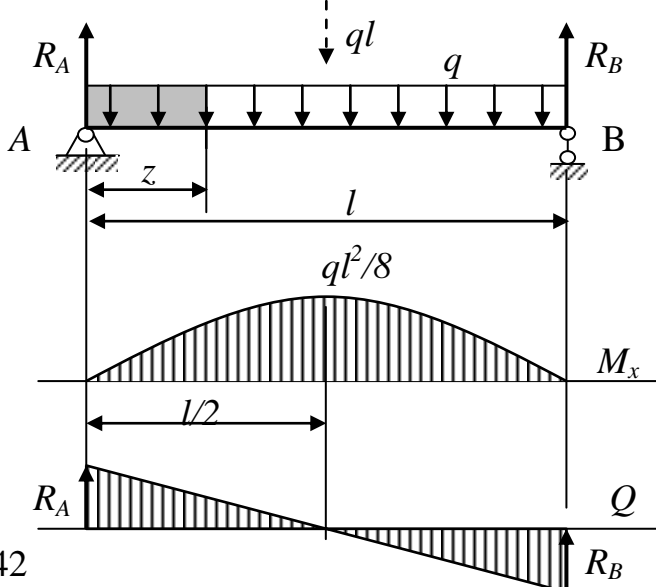
$$\Sigma M_A = -ql \cdot l/2 + R_B \cdot l = 0;$$

$$\Sigma M_B = +ql \cdot l/2 - R_A \cdot l = 0,$$

откуда $R_A = R_B = +ql/2$.

Проверка: $\Sigma Y = R_A + R_B - ql = 0$.

Участок на балке один. Рассмотрим левую часть $0 \leq z \leq l$.



$M_x = +R_A \cdot z - qz \cdot z/2 = +R_A \cdot z - qz^2/2$ – уравнение параболы.

Для построения графика параболы нужно: найти значения параболы на границах участка (две точки); исследовать параболу на экстремум. Возможны два варианта:

1) экстремум находится на рассматриваемом участке – следует вычислить его значение и построить график параболы по трем точкам;

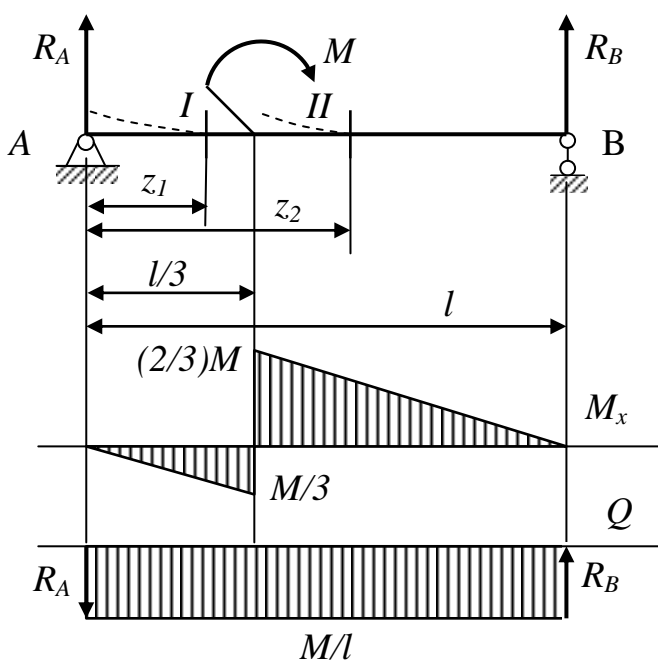
2) экстремум находится за пределами рассматриваемого участка – вычислять его значение не нужно, график параболы строится по двум точкам без вычисления промежуточных значений в виде плавной кривой.

Находим значения параболы на границах участка при $z=0$ $M_x=0$ (первая точка); при $z=l/2$ $M_x=R_A \cdot l - ql^2/2 = (ql/2) \cdot l - ql^2/2 = 0$ (вторая точка). Исследуем параболу на экстремум. Берем производную от уравнения момента и приравниваем ее к нулю: $dM_x/dz = R_A - qz = 0$. Откуда определяем положение экстремума: $z=l/2$. Полученное значение находится в пределах рассматриваемого участка. Вычисляем экстремум параболы, подставив его координату в уравнение момента (параболы): при $z=l/2$ $M_x = R_A \cdot l/2 - q(l/2)^2/2 = (ql/2) \cdot l/2 - ql^2/8 = +ql^2/8$ (третья точка). Строим график параболы по трем точкам.

Уравнение поперечной силы (53) – производная от уравнения момента. Но производную мы уже вычисляли при исследовании параболы на экстремум. Остается только переписать $Q = R_A - qz$ – уравнение прямой линии, график которой строим по двум значениям на границах участка: при $z=0$ $Q = R_A = +ql/2$; при $z=l$ $Q = R_A - ql = ql/2 - ql = -ql/2 = -R_B$.

Из эпюр следует, что данная балка имеет три опасных сечения, где возможно разрушение: над опорами балки (наибольшие значения поперечной силы) и в середине пролета (максимален изгибающий момент).

Вид полученных эпюр свидетельствует о том, что при действии на участке балки равномерно распределенной нагрузки $q = const$ эпюра поперечной силы – наклонная прямая, эпюра изгибающего момента – парабола с выпуклостью против действия распределенной нагрузки.



Пример 3. Двухопорная балка, нагруженная сосредоточенным моментом M

Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = -M + R_B \cdot l = 0;$$

$$\sum M_B = -M - R_A \cdot l = 0,$$

откуда $R_B = +M/l$; $R_A = -M/l$.

Проверка: $\sum Y = R_A + R_B = -M/l + M/l = 0$.

Значение реакции R_A получилось отрицательным, направление ее изменять не будем, но при вычислениях нужно учитывать ее знак.

Участок I. Слева. $0 \leq z_1 \leq l/3$.

$M_{x1} = +R_A \cdot z_1$ – прямая линия.

При $z_1=0$ $M_{x1}=0$; при $z_1=l/3$ $M_{x1}=+R_A \cdot l/3 = -M/3$.
 Поперечная сила $Q_1 = dM_{x1}/dz_1 = +R_A = -M/l = const.$

Участок II. Слева. $l/3 \leq z_2 \leq l$.

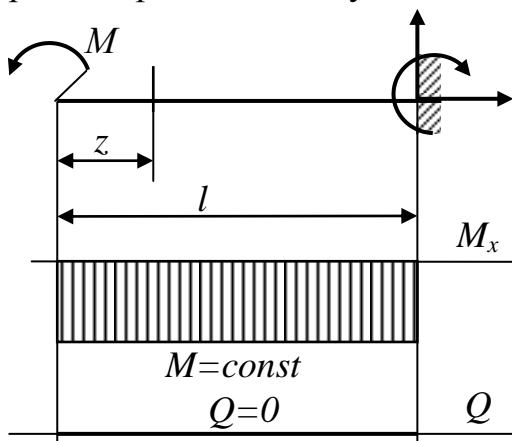
Изгибающий момент $M_{x2} = +R_A \cdot z_2 + M$ – прямая линия. При $z_2=l/3$ $M_{x2} = +R_A \cdot l/3 + M = +(2/3)M$; при $z_2=l$ $M_{x2} = +R_A \cdot l + M = 0$.
 Поперечная сила $Q_2 = +dM_{x2}/dz_2 = +R_A + 0 = -M/l = const.$

Положение опасного сечения – справа от точки приложения момента M .

Особенностью эпюры изгибающего момента при действии сосредоточенного момента является наличие разрыва (скачка) в месте приложения момента.

Пример 4. Консольная балка

Особенностью построения эпюр для консольных балок является необязательность определения реакций в заделке. Но в этом случае при рассмотрении всех участков необходимо исключить заделку, то есть при построении эпюр на всех участках необходимо идти только со стороны свободного конца консоли.



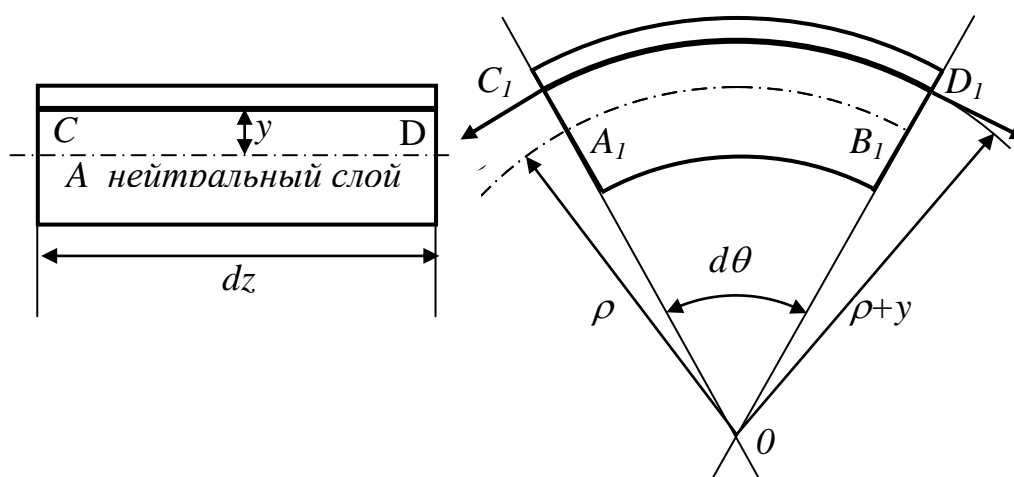
С построения эпюр на всех участках необходимо идти только со стороны свободного конца консоли.

Со стороны свободного конца консоли $0 \leq z \leq l$.

$M_x = -M = const.$ $Q = dM_x/dz = 0 = const.$

Такой вид деформации называется чистым изгибом.

5.2. Нормальные напряжения при плоском изгибе



Рассмотрим элемент бесконечно малой длины dz балки, находящейся в состоянии чистого изгиба (пример 4). Поперечная сила Q в сечениях отсутствует. Действие момента M_x приводит к изгибу стержня, при этом часть волокон материала, искривляясь, растягивается, другая часть сжимается. Их

разделяет слой материала, который не испытывает ни растяжения, ни сжатия – **нейтральный слой**.

Растяжение и сжатие волокон свидетельствуют о наличии в сечении нормальных напряжений σ . Следовательно, **изгибающий момент M_x является статическим эквивалентом нормальных напряжений**.

Нормальное напряжение в произвольном слое материала CD , находящиеся на расстоянии y от нейтрального слоя, определим из закона Гука

$$(1) \quad \sigma_{CD} = E \cdot \varepsilon_{CD},$$

где ε_{CD} – относительное удлинение слоя CD ;

$$\varepsilon_{CD} = (C_1D_1 - CD) / CD.$$

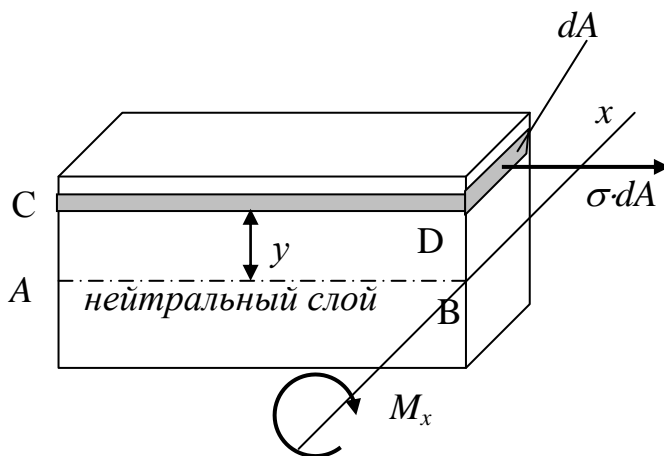
Обозначим радиус кривизны нейтрального слоя ρ и взаимный угол поворота сечений $d\theta$. Длина слоя $CD = AB = A_1B_1 = \rho \cdot d\theta$ до изгиба равна длине нейтрального слоя AB , которая при изгибе не изменяется и может быть определена как длина дуги окружности радиуса ρ .

Длину C_1D_1 слоя CD после изгиба определим как длину дуги окружности радиуса $(\rho + y)$: $C_1D_1 = (\rho + y) \cdot d\theta$.

Тогда относительное удлинение $\varepsilon_{CD} = [(\rho + y) \cdot d\theta - \rho \cdot d\theta] / (\rho \cdot d\theta) = y / \rho$ и напряжение $\sigma_{CD} = E \cdot y / \rho$.

(*)

Последняя формула не может использоваться в расчетах, так как неизвестен радиус кривизны нейтрального слоя ρ .



Выразим величину изгибающего момента M_x через нормальные напряжения в сечении. Совместим ось x с нейтральной линией в сечении. Момент M_x равен интегральной сумме моментов сил от напряжений по всему сечению, то есть с учетом (*)

$$M_x = \int_A \sigma \cdot dA \cdot y = \int_A \frac{E \cdot y \cdot dA \cdot y}{\rho} = E \frac{1}{\rho} \int_A y^2 dA = E \frac{1}{\rho} I_x,$$

где $\int_A y^2 dA = I_x$ – момент инерции сечения относительно нейтральной линии (7).

Выразив из последнего равенства кривизну нейтрального слоя (54) и подставив в (*), получим формулу для определения нормальных напряжений при изгибе в любой точке сечения (55) – *формулу Навье*.

$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (54)$ <p>кривизна нейтрального слоя при изгибе</p>

$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \quad (55)$ <p>формула Навье</p>
--

Для того чтобы определить, как проходит нейтральная линия в сечении, воспользуемся условием, что продольной силы в сечении при изгибе нет, то есть $N=0$.

Продольная сила есть интегральная сумма нормальных напряжений по всему сечению. Тогда с учетом (*)

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot y \cdot dA}{\rho} = \frac{E}{\rho} \int y \cdot dA = \frac{E}{\rho} S_x = 0,$$

где $\int_A y \cdot dA = S_x = 0$ статический момент сечения относительно нейтральной

линии (3), который равен нулю в том случае, если ось центральная. Следовательно, *нейтральная линия проходит через центр сечения*.

При плоском изгибе в сечении нет и изгибающего момента M_y . Определим его значение аналогично моменту M_x и приравняем к нулю:

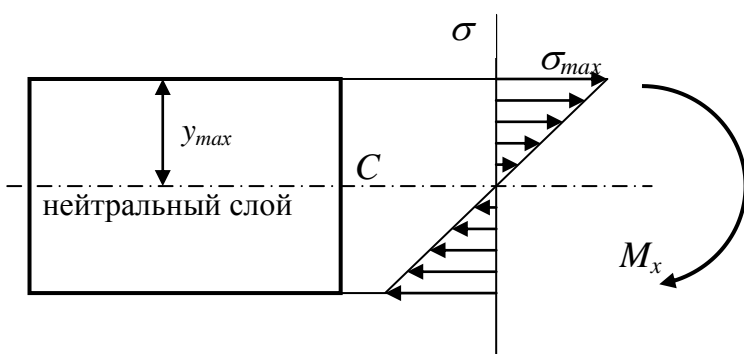
$$M_y = \int_A \sigma dA \cdot x = \int_A \frac{E \cdot y \cdot dA \cdot x}{\rho} = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = \frac{E}{\rho} I_{xy} = 0,$$

где $\int_A xy dA = I_{xy} = 0$ – центробежный момент инерции сечения (8), который

равен нулю относительно главных осей инерции.

Отсюда следует:

- изгиб будет плоским, если нагрузка расположена в одной из главных плоскостей инерции балки;
- нейтральный слой материала совпадает с другой главной плоскостью инерции балки, а нейтральная линия проходит через центр сечения и совпадает с главной осью инерции сечения.



После определения положения нейтрального слоя можно наглядно представить распределение нормальных напряжений в сечении при изгибе. Напряжения меняются по линейному закону пропорционально удалению от нейтрального слоя. В

нейтральном слое они равны нулю, при переходе через нейтральный слой меняют знак. Максимальные значения напряжений возникают в слое материала, наиболее удаленном от нейтрального слоя.

Для определения максимальных значений напряжений подставим в

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (56)$$

максимальное значение нормальных напряжений при изгибе

формулу Навье y_{\max} сечения. Учитывая, что отношение $I_x/y_{\max} = W_x$ – есть момент сопротивления сечения (21), окончательно получим выражение (56) для максимальных нормальных напряжений при изгибе.

Выражения (55–56) получены для чистого

изгиба. При поперечном изгибе они становятся приближенными, но имеют степень точности, достаточную для практических расчетов.

5.3. Условие прочности при плоском изгибе по нормальным напряжениям

Используя общее условие прочности по нормальным напряжениям (35) $\sigma_{max} \leq [\sigma]$, с учетом формулы (56) получаем условие прочности при изгибе по

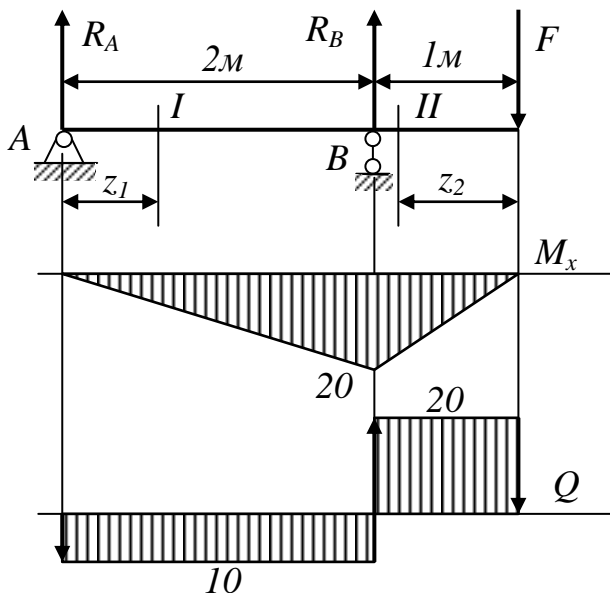
$$\frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]_{изг} \quad (57)$$

условие прочности
при изгибе по
нормальным напряжениям

нормальным напряжениям (57). В качестве изгибающего момента M_x необходимо использовать максимальное по модулю значение с эпюры изгибающего момента.

Условие прочности (57) по нормальным напряжениям является основным и служит для проектировочного расчета при изгибе.

Пример проектировочного расчета при плоском изгибе



Определить размеры поперечного сечения балки для четырех вариантов сечения:

- прямоугольного при $h/b=2$;
- квадратного;
- круглого;
- стандартного двутавра.

Сравнить экономичность профилей.

Сила $F=20$ кН. Материал – сталь Ст3.

Решение

Вычисляем реакции в опорах.

$$\sum M_A = +R_B \cdot 2 - F \cdot 3 = 0;$$

$$\sum M_B = -R_A \cdot 2 - F \cdot 1 = 0.$$

$$R_B = (3/2)F = 30 \text{кН}; \quad R_A = -(1/2)F = -10 \text{кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum Y = R_A + R_B - F = -10 + 30 - 20 = 0.$$

Строим эпюры изгибающего момента и поперечной силы.

Участок I. Слева. $0 \leq z_1 \leq 2$ м. Изгибающий момент $M_{x1} = +R_A \cdot z_1$ – уравнение прямой. При $z_1=0$ $M_{x1}=0$; при $z_1=2$ м $M_{x1} = -10 \cdot 2 = -20$ кН·м. Поперечная сила $Q_1 = +dM_{x1}/dz_1 = +R_A = -10$ кН.

Участок II. Справа. $0 \leq z_2 \leq 1$ м. Изгибающий момент $M_{x2} = -F \cdot z_2$ – уравнение прямой. При $z_2=0$ $M_{x2}=0$; при $z_2=1$ м $M_{x2} = -20 \cdot 1 = -20$ кН·м. Поперечная сила $Q_2 = -dM_{x2}/dz_2 = +F = +20$ кН.

Опасное сечение балки находится над опорой B. Значение $|M_x|_{max} = 20$ кН·м.

Расчет балки на прочность по нормальным напряжениям.

$$\frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]_{изг}$$

Запишем условие прочности при плоском изгибе по нормальным напряжениям (57). Из справочных таблиц выпишем значение допускаемого напряжения на изгиб для стали Ст3 $[\sigma]_{изг} = 150$ МПа.

Рассмотрим заданные варианты сечения.

Прямоугольное сечение. Момент сопротивления прямоугольного сечения $W_x = bh^2/6$ или при заданном соотношении сторон $h/b=2$
 $W_x = b(2b)^2/6 = (2/3)b^3 = 0,667b^3$. Полученное выражение подставим в условие прочности и определим размер b

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{|M_x|_{\max}}{0,667[\sigma]_{\text{изг}}}} = \sqrt[3]{\frac{20 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,0585 \text{ м} = 58,5 \text{ мм},$$

тогда $h = 2b = 58,5 \cdot 2 = 117 \text{ мм}$.

Полученные размеры округляем до нормальных значений: $b = 60 \text{ мм}$; $h = 120 \text{ мм}$.

Площадь полученного прямоугольного сечения $A = bh = 60 \cdot 120 = 7200 \text{ мм}^2 = 72 \text{ см}^2$.

Квадратное сечение. Момент сопротивления квадратного сечения $W_x = a^3/6$, тогда из условия прочности

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot |M_x|_{\max}}{[\sigma]_{\text{изг}}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 20 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6}} = 0,0928 \text{ м} = 92,8 \text{ мм}.$$

Округляем сторону до нормального значения $a = 95 \text{ мм}$.

Площадь квадратного сечения $A = a^2 = 95 \cdot 95 = 9025 \text{ мм}^2 = 90,25 \text{ см}^2$.

Круглое сечение. Момент сопротивления круглого сечения $W_x = \pi d^3/32$, из условия прочности

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_x|_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]_{\text{изг}}}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 20 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150 \cdot 10^6}} = 0,110 \text{ м} = 110 \text{ мм}.$$

Полученное значение соответствует нормальному размеру.

Площадь круглого сечения $A = \pi d^2/4 = \pi(110)^2/4 = 9499 \text{ мм}^2 = 95 \text{ см}^2$.

Двутавровое сечение. Из условия прочности определяем необходимое значение момента сопротивления

$$W_x \geq |M_x|_{\max} / [\sigma]_{\text{изг}} = 20 \cdot 10^3 / (150 \cdot 10^6) = 0,133 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 133 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента двутавра ГОСТ 8239–89 ближайшее большее значение момента сопротивления $(W_x)_{\text{табл}} = 143 \text{ см}^3$ у двутавра №18. Площадь сечения двутавра №18 берем из таблицы сортамента $A = 23,4 \text{ см}^2$.

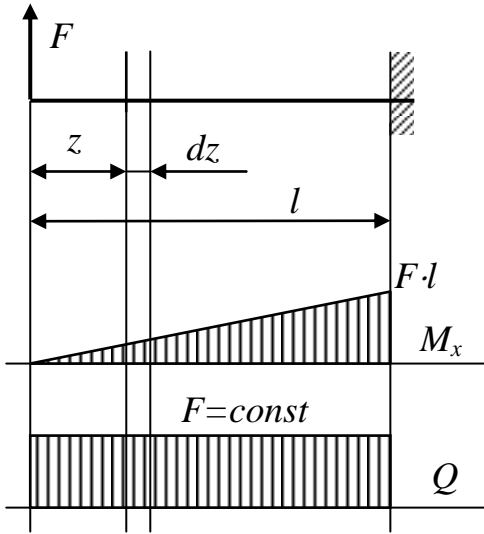
Оценим экономичность сечений. В качестве критерия экономичности примем расход материала (массу балки). Очевидно, что масса балки зависит от объема материала, который в свою очередь пропорционален площади сечения.

Расположим сечения в порядке увеличения их площади и найдем отношения площадей фигур к минимальному значению площади.

Форма сечения	$A, \text{ см}^2$	A/A_{\min}
Двутавр	23,4	1
Прямоугольник	72	3,1
Квадрат	90,25	3,9
Круг	95	4,1

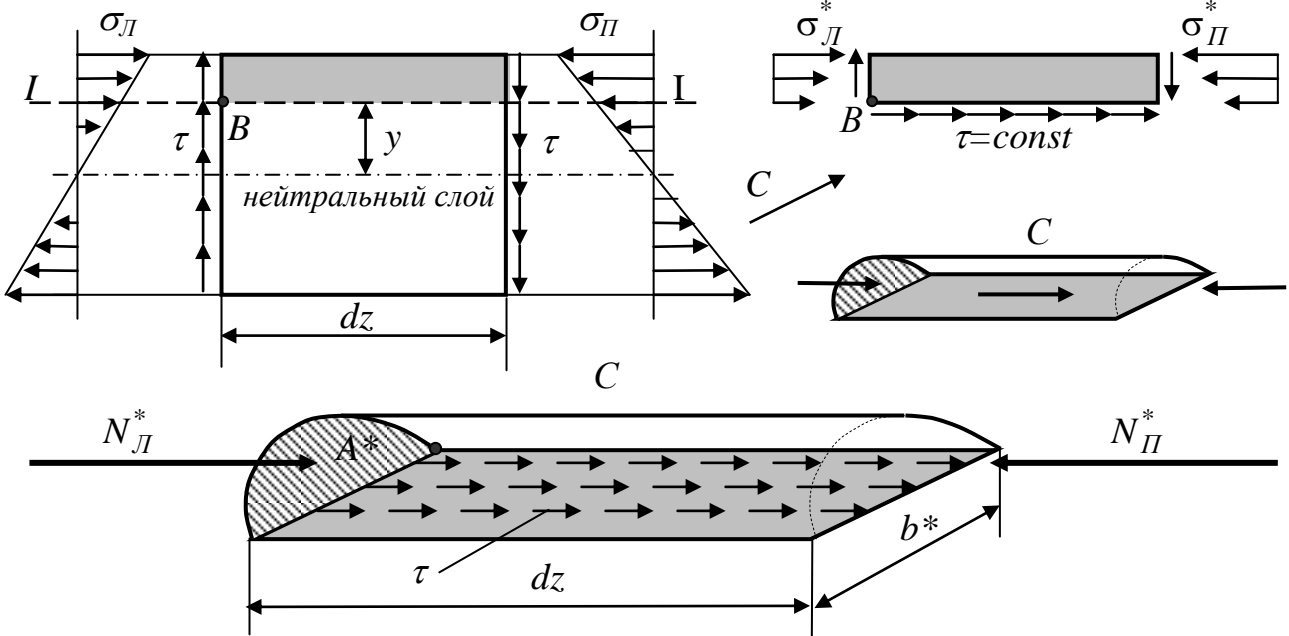
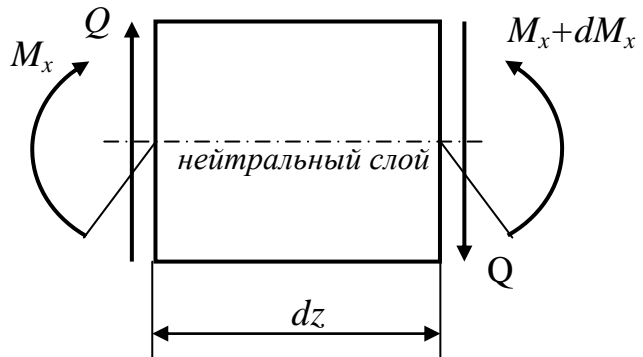
Из таблицы видно, что самым экономичным при изгибе является двутавровое сечение, наиболее нерационально – круглое сечение. При одинаковой прочности балка круглого сечения будет весить в 4 раза больше, чем двутавр.

5.4. Касательные напряжения при плоском изгибе



Рассмотрим случай поперечного изгиба. Наличие поперечной силы Q свидетельствует о том, что в сечении возникают кроме нормальных напряжений и касательные напряжения τ . Выделим из балки элемент бесконечно малой длины dz . Проставим в сечениях внутренние силовые факторы M_x и Q и заменим их напряжениями σ и τ .

Определим величину касательных напряжений в точке B на расстоянии y от нейтрального слоя. Для этого от выделенного элемента отсечем горизонтальной плоскостью $I-I$, проходящей через точку B , верхнюю часть и рассмотрим условие ее равновесия.



Все, что относится только к верхней отсеченной части, будем обозначать со звездочкой $*$, так ширину отсеченной части обозначим b^* , площадь поперечного сечения (торца) верхней части A^* . На основании закона парности касательных напряжений делаем вывод: если есть касательные напряжения в поперечном сечении, то такие же касательные напряжения должны действовать

и в продольном сечении. Слева на торец отсеченной верхней части действуют нормальные напряжения $\sigma_{Л}^*$, которые в сумме дадут значение равнодействующей продольной силы $N_{Л}^*$. На правый торец отсеченной верхней части действуют нормальные напряжения $\sigma_{П}^*$, которые в сумме дадут равнодействующую продольную силу $N_{П}^*$. Касательные напряжения, действующие в продольном (горизонтальном) сечении, в сумме дадут равнодействующую, равную $\tau \cdot dz \cdot b^*$. Тогда условие равновесия отсеченной части будет иметь вид:

$$\Sigma Z = + N_{Л}^* - N_{П}^* + \tau \cdot dz \cdot b^* = 0,$$

откуда определяются искомые касательные напряжения.

Находим продольные силы, интегрально суммируя нормальные напряжения по площади торца верхней части. При этом сами нормальные напряжения в поперечных сечениях выражаем через изгибающие моменты в этих сечениях по формуле Навье (55).

$$N_{Л}^* = \int_{A^*} \sigma_{Л}^* \cdot dA = \int_{A^*} \frac{M_x}{I_x} y \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} \int_{A^*} y \cdot dA = \frac{M_x}{I_x} S_x^*;$$

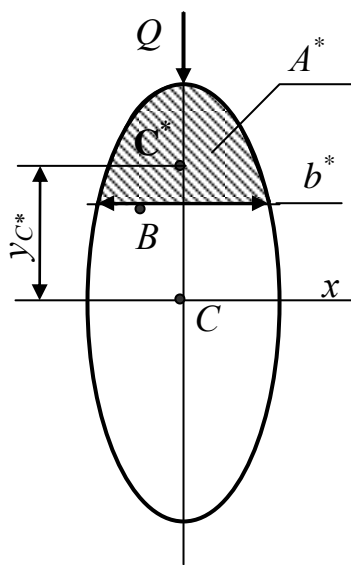
$$N_{П}^* = \int_{A^*} \sigma_{П}^* \cdot dA = \int_{A^*} \frac{M_x + dM_x}{I_x} y \cdot dA = \frac{M_x + dM_x}{I_x} \int_{A^*} y \cdot dA = \frac{M_x + dM_x}{I_x} S_x^*,$$

где $\int_{A^*} y \cdot dA = S_x^*$ – статический момент отсеченной части поперечного сечения.

Подставив полученные значения продольных сил в уравнение равновесия и заменив отношение $dM_x/dz = Q$ (52), окончательно получим (58).

$$\tau_B = \frac{Q \cdot S_x^*}{I_x \cdot b^*} \quad (58)$$

формула Журавского



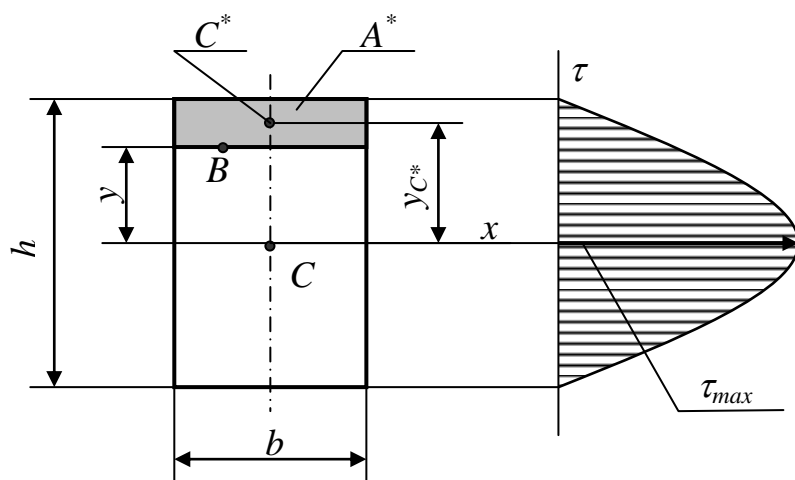
Чтобы найти величину касательных напряжений в произвольной точке B поперечного сечения, нужно:

- определить значение поперечной силы Q в данном сечении (с эпюры поперечной силы);
- совместить ось x в сечении с нейтральной линией (главной центральной осью инерции сечения);
- вычислить значение момента инерции всего сечения I_x ;
- провести через точку B , в которой определяются касательные напряжения, сечение параллельно нейтральной линии, найти ширину профиля в этом месте b^* ;
- найти центр отсеченной части сечения C^* , ее площадь A^* и вычислить статический момент отсеченной части сечения относительно

нейтральной линии $S_x^* = A^* \cdot y_{C^*}$;

- вычислить касательные напряжения по формуле Журавского.

Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении.



Момент инерции
прямоугольного сечения
 $I_x = bh^3/12$.

Ширина
прямоугольника
постоянна
 $b^* = b$.

Площадь отсеченной
части сечения
 $A^* = b \cdot (h/2 - y)$.

Координата центра C^*
отсеченной части
 $y_{C^*} = y + [(h/2 - y)/2] =$

$= (1/2) \cdot (h/2 + y)$.

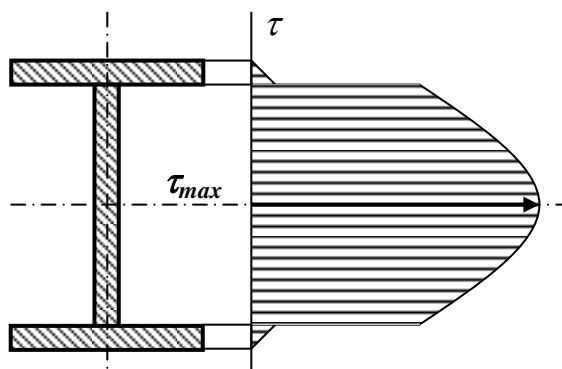
Статический момент отсеченной части сечения

$S_x^* = A^* \cdot y_{C^*} = b \cdot (h/2 - y) \cdot (1/2) \cdot (h/2 + y) = (b/2) \cdot [(h/2)^2 - (y)^2]$.

Подставив полученные величины в формулу Журавского, после сокращений получим:

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - (y)^2 \right].$$

Касательные напряжения по высоте прямоугольного сечения распределяются по параболическому закону. В наиболее отдаленных от нейтральной линии точках при $y = \pm h/2$ касательные напряжения равны нулю. Максимальные касательные напряжения возникают при $y = 0$, то есть в нейтральном слое.



Полученный закон изменения касательных напряжений можно распространить на другие сечения, состоящие из прямоугольников, например на двутавровое сечение. Скачок напряжений на границе полки и стойки двутавра объясняется резким изменением ширины сечения. Похожая эпюра напряжений характерна и для швеллера.

5.5. Условие прочности по касательным напряжениям

$$\frac{|Q|_{\max} \cdot S_x^*}{I_x \cdot b^*} \leq [\tau] \quad (59)$$

условие прочности при
изгибе по касательным
напряжениям

Заменяв левую часть общего условия прочности по касательным напряжениям $\tau_{\max} \leq [\tau]$ на (58), получим условие прочности по

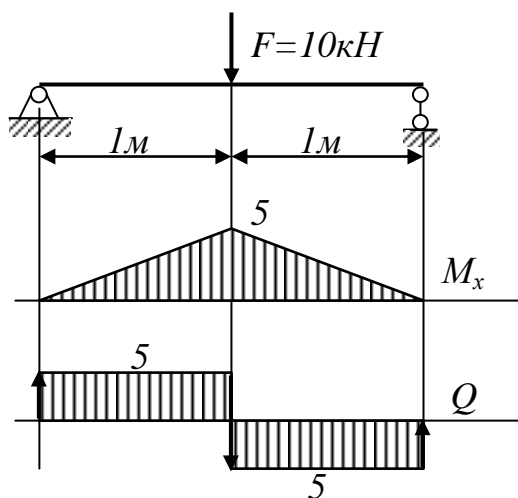
касательным напряжениям при изгибе (59), где максимальное по модулю значение поперечной силы берется с эпюры. Для сечений, у которых ось x является осью симметрии, S_x^* – статический момент половины сечения (у швеллеров и двутавров – табличная величина), b^* – ширина нейтрального слоя.

Условие прочности по касательным напряжениям (59) используется для поверочного расчета после определения размеров сечения из условия прочности по нормальным напряжениям (57). Значение максимальных касательных напряжений обычно значительно меньше нормальных напряжений, поэтому проверке подлежат не все балки, а только имеющие ослабленный нейтральный слой: клеенные, паянные, сваренные или изготовленные из слоистого материала (например, деревянные).

Пример проверки балки по касательным напряжениям

Для заданной схемы балки определить необходимые размеры прямоугольного сечения деревянного бруса при соотношении сторон $h/b=1,5$. Значения допускаемых напряжений принять следующие (для древесины хвойных пород при 15% влажности):

$[\sigma]_{изг}=8\text{МПа}$; на скалывание вдоль волокон $[\tau]_{ск}=1\text{МПа}$.



Решение

С эпюр изгибающих моментов и поперечных сил берем максимальные по модулю значения $|M_x|_{max}=5\text{кН}\cdot\text{м}$, $|Q|_{max}=5\text{кН}$.

Проектировочный расчет. Определяем

размеры сечения из условия прочности по нормальным напряжениям (57).

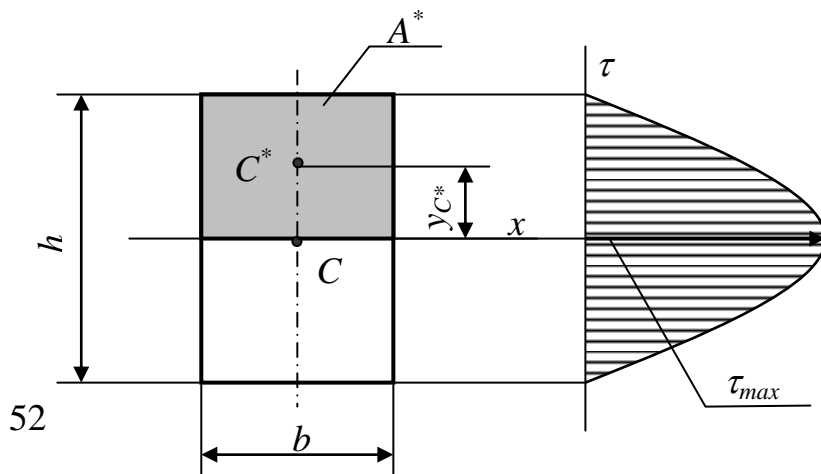
$$\frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]_{изг}$$

Выражение момента сопротивления прямоугольного сечения при $h/b=1,5$ $W_x=bh^2/6=b(1,5b)^2/6=0,375b^3$ подставим в условие прочности. Откуда

$$b \geq 3 \sqrt{\frac{|M_x|_{max}}{0,375[\sigma]_{изг}}} = 3 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3}{0,375 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,119\text{м} = 119\text{мм},$$

тогда $h=1,5b=119 \cdot 1,5=178,5\text{мм}$.

Округляем до нормальных размеров: $b=120\text{мм}$; $h=180\text{мм}$.



Поверочный расчет.

Определим величину максимальных касательных напряжений в сечении балки по формуле Журавского (58). Для нейтрального слоя:

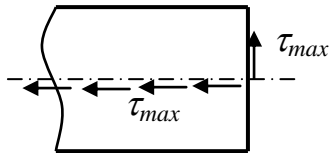
$$I_x = bh^3/12; \quad b^* = b;$$

$$A^* = b \cdot h/2; \quad y_{C^*} = h/4;$$

$$S_x^* = A^* \cdot y_{C^*} = (bh/2) \cdot h/4 = bh^2/8,$$

тогда

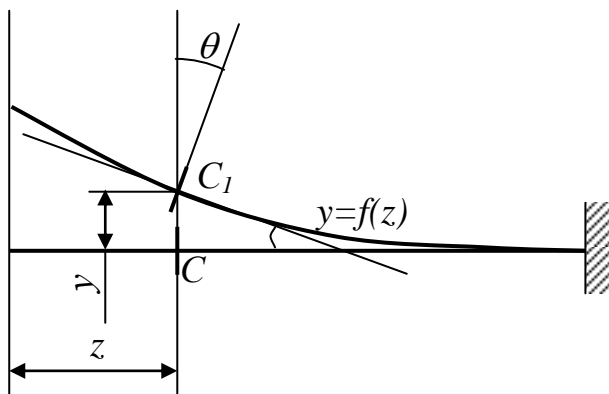
$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{|Q|_{\max} \cdot S_x^*}{I_x \cdot b^*} = \\ &= \frac{3|Q|_{\max}}{2bh} = \frac{3|Q|_{\max}}{2A} = (3 \cdot 5 \cdot 10^3) / (2 \cdot 0,12 \cdot 0,18) = 0,347 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,347 \text{ МПа}. \end{aligned}$$



Эти касательные напряжения «перерезать» брус в поперечном направлении не могут. Но такие же напряжения действуют вдоль нейтрального слоя, а это может привести к сдвигу (сколу) древесины. Сравнивая максимальные касательные напряжения (0,347МПа) с допускаемыми (1МПа), делаем вывод, что условие прочности по касательным напряжениям при полученных размерах сечения выполняется.

5.6. Понятие о перемещениях при изгибе

При изгибе балки центр C произвольного поперечного сечения перемещается в поперечном направлении на расстояние y (*прогиб*) и само сечение при этом поворачивается на угол θ (*угол поворота сечения*). Эти два параметра называются перемещениями при изгибе и характеризуют деформацию балки. Уравнение $y=f(z)$ кривой, вид которой принимает изогнутая ось балки, называется уравнением упругой линии и определяет величину прогиба в любом сечении.



Очевидно, что угол наклона касательной к упругой линии в произвольном сечении равен углу поворота этого сечения, следовательно, $\theta = y'$ – уравнение углов поворота есть производная от уравнения упругой линии.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x} \quad (54)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (*)$$

Кривизна нейтрального слоя при изгибе определяется выражением (54). Из курса дифференциальной геометрии известно, что кривизну линии находят по формуле (*). Пренебрегая малой величиной квадрата угла поворота, приравнявая оба выражения кривизны, получим дифференциальное уравнение упругой линии (60).

$$y'' = \frac{M_x}{EI_x} \quad (60)$$

дифференциальное
уравнение
упругой линии

Полученное уравнение уже использовалось при выводе формулы Эйлера для критической силы сжатого стержня. Его можно использовать и для определения перемещений при изгибе

путем последовательного интегрирования. На этом и основан вывод одного из способов определения перемещений – *метода начальных параметров*.

Ограничимся рассмотрением другого не менее эффективного метода, основанного на применении *интеграла Мора*.

5.7. Метод Мора для определения перемещений при изгибе

Метод Мора основан на использовании в расчетах потенциальной энергии упругой деформации балки и применении теоремы Кастилиано.

Потенциальная энергия упругой деформации при изгибе.

$$U = \sum \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (61)$$

потенциальная энергия
при плоском изгибе

При деформации балки в материале, как в пружине, аккумулируется потенциальная энергия. Величину потенциальной энергии можно найти как работу внутренних силовых факторов на соответствующем перемещении. В сечении балки возникают два силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила.

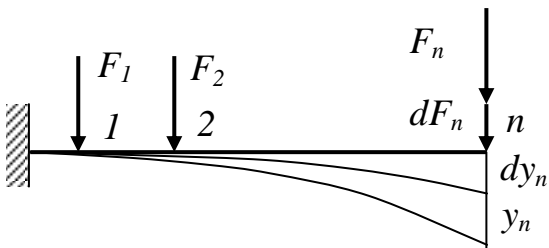
Энергией сдвига обычно пренебрегают. Действие момента приводит к повороту сечений на угол θ . Для элемента балки бесконечно малой длины dz $dU = 1/2 M_x \cdot d\theta$, где сомножитель $1/2$ учитывает статическое приложение нагрузки. Подставив сюда выражение $d\theta = (M_x dz) / (EI_x)$ из дифференциального уравнения упругой линии (60), получим (61), где интегрирование производится на каждом участке балки и результаты суммируются по всем участкам.

Теорема Кастилиано.

Загрузим балку системой внешних сил F_1, F_2, \dots, F_n . Величину потенциальной энергии упругой деформации балки обозначим U . С точки зрения математики величина U является функцией нескольких переменных

$U = U(F_1, F_2, \dots, F_n)$. Придадим одной из сил, например, F_n бесконечно малое приращение dF_n . Тогда изменение потенциальной энергии будет равно частному

дифференциалу $\frac{\partial U}{\partial F_n} dF_n$ и суммарная энергия составит величину $U + \frac{\partial U}{\partial F_n} dF_n$.



Изменим порядок приложения сил. Вначале к балке статически прикладываем приращение dF_n . За счет деформации балки точка n переместится вместе с силой dF_n на величину прогиба dy_n , при этом совершается работа, равная $1/2 dF_n \cdot dy_n$. Затем прикладываем к балке систему сил

F_1, F_2, \dots, F_n , при этом потенциальная энергия балки увеличится на величину U . Но за счет деформации балки имеющаяся в точке n сила dF_n дополнительно переместится на величину прогиба y_n , следовательно, совершается дополнительная работа $dF_n \cdot y_n$ (множитель $1/2$ отсутствует, так как значение силы dF_n не меняется). Тогда общая потенциальная энергия деформации составит величину $1/2 dF_n \cdot dy_n + U + dF_n \cdot y_n$. Так как величина энергии не зависит от порядка приложения сил, то приравняем выражения потенциальной энергии

$U + \frac{\partial U}{\partial F_n} dF_n = 1/2 dF_n \cdot dy_n + U + dF_n \cdot y_n$, откуда, пренебрегая бесконечно малой величиной $1/2 dy_n$, получим $y_n = \frac{\partial U}{\partial F_n}$.

Вполне очевидно, что если бы в точке n находились не сила F_n , а момент M_n , то мы получили бы выражение $\theta_n = \frac{\partial U}{\partial M_n}$.

$$\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \quad (62)$$

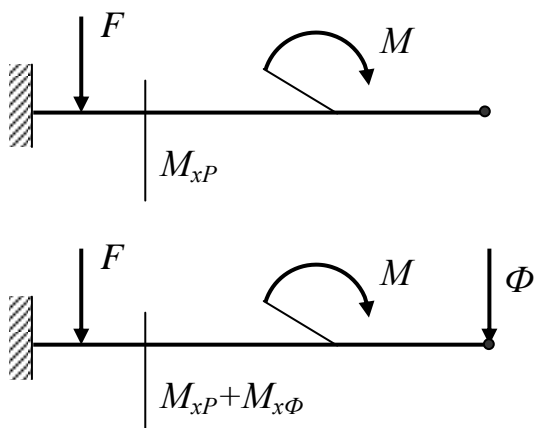
теорема Кастилиано

Переходя к обобщенным силам и перемещениям, можно сформулировать вывод (62): *частная производная от потенциальной энергии по обобщенной силе есть обобщенное перемещение точки приложения этой обобщенной силы в направлении ее действия.*

Данный вывод носит название теоремы Кастилиано и справедлив для любого вида деформации. Ограниченность данного метода определения перемещений вполне очевидна: определять можно перемещения только тех точек, в которых имеется внешняя сила (момент) и только в направлении их действия.

Интеграл Мора.

Недостаток теоремы Кастилиано легко устранить, если самим приложить в интересующей нас точке фиктивную силу (или момент) Φ .



Обозначим в произвольном сечении величину изгибающего момента от действия внешней нагрузки (системы обобщенных сил) M_{xP} . Приложим в точке, перемещение которой нужно найти, фиктивную силу (или момент) Φ . Изгибающий момент в том же сечении от действия обобщенной фиктивной силы обозначим $M_{x\Phi}$. Тогда суммарный момент будет равен $M_x = M_{xP} + M_{x\Phi}$. Очевидно, что

величина момента $M_{x\Phi}$ прямо пропорциональна значению фиктивной силы Φ , то есть $M_{x\Phi} = k \cdot \Phi$. Выясним физический смысл коэффициента пропорциональности k . Для этого предположим, что фиктивная сила равна единице: $\Phi = 1$. Тогда $k \cdot 1 = M_{x\Phi}$, коэффициент k – есть значение изгибающего момента от фиктивной силы равной единице (единичный момент), обозначать его будем с черточкой наверху: $k = \overline{M}_{x\Phi}$. Тогда $M_{x\Phi} = \overline{M}_{x\Phi} \cdot \Phi$ и $M_x = M_{xP} + \overline{M}_{x\Phi} \cdot \Phi$. Подставим полученное значение M_x в выражение потенциальной энергии при изгибе (61) и выполним действия:

$$U = \sum \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} = \sum \int \frac{(M_{xP} + \overline{M}_{x\Phi} \cdot \Phi)^2 dz}{2EI_x} = \sum \int \frac{(M_{xP})^2 dz}{2EI_x} +$$

$$+ \sum \int \frac{2M_{xP} \cdot \overline{M}_{x\Phi} \cdot \Phi \cdot dz}{2EI_x} + \sum \int \frac{(\overline{M}_{x\Phi} \cdot \Phi)^2 dz}{2EI_x}.$$

Воспользуемся теоремой Кастилиано и возьмем частную производную от полученного выражения по фиктивной силе:

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = 0 + \sum \int \frac{M_{xP} \cdot \overline{M}_{x\Phi} \cdot dz}{EI_x} + \sum \int \frac{(\overline{M}_{x\Phi})^2 \cdot \Phi \cdot dz}{EI_x}.$$

В полученных интегралах фиктивную силу приравняем к нулю, так как ее на самом деле нет:

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = \sum \int \frac{M_{xP} \cdot \overline{M}_{x\Phi} \cdot dz}{EI_x} + 0.$$

В последнем выражении у изгибающих моментов вторые индексы можно убрать, запомнив, что M_x – величина изгибающего момента в сечении балки от действия внешней нагрузки (*грузовая эпюра моментов*); \overline{M}_x – величина изгибающего момента в том же сечении от действия единичной фиктивной силы или момента (*единичная эпюра моментов*). Но частная производная от потенциальной энергии определяет величину перемещения. Таким образом, мы

$$\Delta_{\Phi} = \sum \int \frac{M_x \overline{M}_x dz}{EI_x} \quad (63)$$

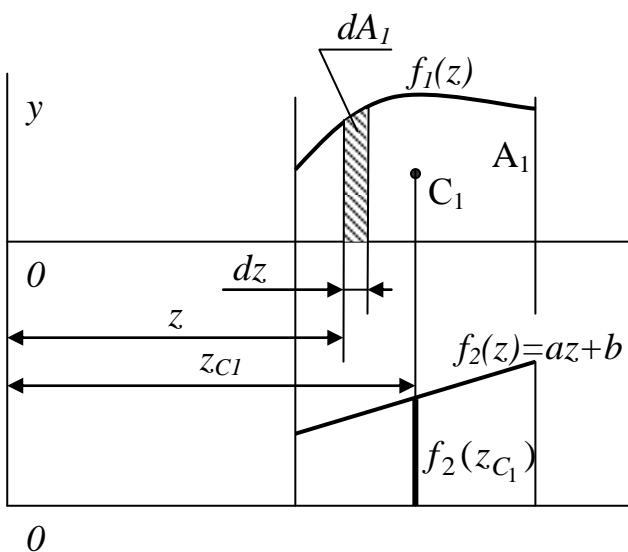
интеграл Мора

получили расчетную формулу (63) для определения перемещения любой точки балки – *интеграл Мора*. При вычислении прогиба в качестве Φ берется единичная сила, при вычислении угла поворота – единичный момент.

момент.

5.8. Способ Верещагина (способ перемножения эпюр)

В том случае, если жесткость балки на участке постоянна, то ее можно вынести из-под знака интеграла (63). Под интегралом останется произведение



двух функций, которые в принципе являются эпюрами моментов. Единичная эпюра моментов всегда линейна, в этом случае вычисление интеграла можно существенно упростить.

Пусть на участке балки грузовая эпюра моментов имеет произвольное уравнение $M_x = f_1(z)$. Единичная эпюра моментов – прямая линия, имеющая уравнение $\overline{M}_x = f_2(z) = az + b$.

Тогда

$$\int M_x \cdot \overline{M}_x \cdot dz = \int f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz =$$

$$= \int f_1(z) \cdot (az + b) dz = a \int f_1(z) \cdot z \cdot dz + b \int f_1(z) \cdot dz .$$

Второе подынтегральное выражение $f_1(z) \cdot dz = dA_1$ представляет собой площадь элементарной полоски грузовой эпюры, а весь интеграл – площадь грузовой эпюры моментов A_1 .

Первое подынтегральное выражение $f_1(z) \cdot z \cdot dz = dA_1 \cdot z = dS_y$ – статический момент элементарной полоски относительно оси y , а весь интеграл – статический момент грузовой эпюры S_y , который, как известно, равен произведению площади на координату центра площади: $S_y = A_1 \cdot z_{C1}$.

Тогда $\int M_x \cdot \bar{M}_x \cdot dz = a \cdot A_1 \cdot z_{C1} + b \cdot A_1 = A_1(a \cdot z_{C1} + b) = A_1 f_2(z_{C1})$, где выражение в скобках есть ордината единичной эпюры, расположенная под центром площади грузовой эпюры моментов.

$$\int M_x \cdot \bar{M}_x \cdot dz = \{A_1\} \cdot [\bar{M}_x(z_{C1})] \quad (64)$$

способ Верещагина

Таким образом, интеграл от произведения двух эпюр равен произведению площади грузовой эпюры на ординату единичной эпюры,

расположенную под центром площади грузовой эпюры. Это правило называется *способом Верещагина*, или способом перемножения эпюр. Принято значение площади грузовой эпюры заключать в фигурные скобки, а значение высоты единичной эпюры – в квадратные скобки. Произведение берется с плюсом, если обе эпюры лежат по одну сторону от нуля. Если обе эпюры линейные, то порядок перемножения безразличен.

Перед перемножением грузовой эпюра разбивается на простые геометрические фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический сегмент.

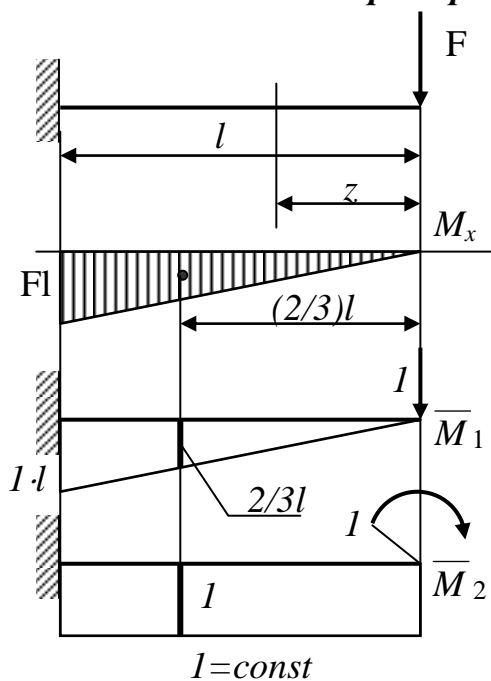
Площадь параболического сегмента определяют по формуле $A = \frac{q(L)^3}{12}$,

где q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки;

L – длина участка с распределенной нагрузкой.

Каждая составляющая грузовой эпюры отдельно перемножается с единичной эпюрой, результаты алгебраически складываются.

Пример определения перемещений



Для консоли, нагруженной сосредоточенной силой, определим максимальные значения прогиба и угла поворота сечений.

Решение

Строим грузовую эпюру моментов. Фигура получилась простая (треугольник), разбивки не требует. Наносим положение центра треугольника на расстоянии $2/3l$ от вершины.

Максимальные перемещения будут, очевидно, на конце консоли.

Для определения прогиба прикладываем на конце консоли единичную силу. Строим единичную эпюру моментов \bar{M}_1 . Для экономии места ее совмещаем с

расчетной схемой. Из центра грузового треугольника опускаем перпендикуляр на единичную эпюру и находим ее высоту в этом месте: $2/3h=2/3l$.

Определяем величину прогиба методом Мора (63), используя правило Верещагина (64):

$$y_{max} = \sum \int \frac{M_x \overline{M}_1 dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \sum \int M_x \overline{M}_1 dz = \frac{1}{EI_x} \left(\left\{ \frac{1}{2} l \cdot Fl \right\} \left[\frac{2}{3} l \right] \right) = \frac{Fl^3}{3EI_x}.$$

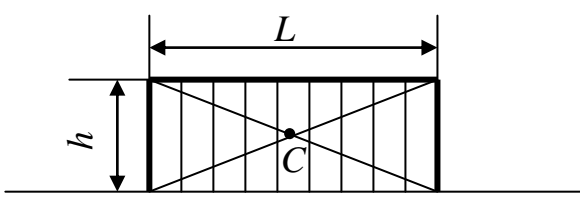
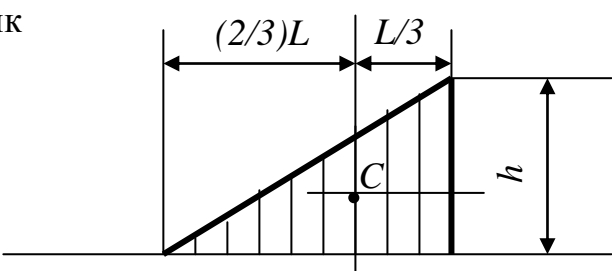
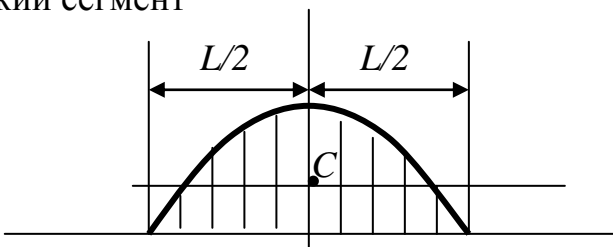
Направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Для определения угла поворота сечения прикладываем к консоли единичный момент. Строим единичную эпюру \overline{M}_2 . Высота единичной эпюры под центром грузового треугольника равна 1. Вычисляем угол поворота:

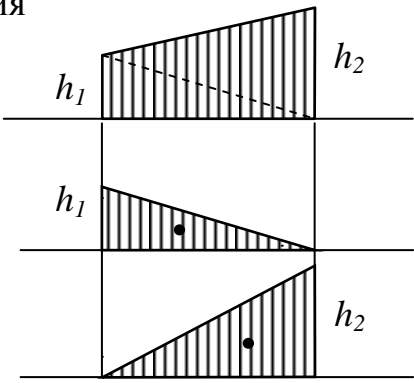
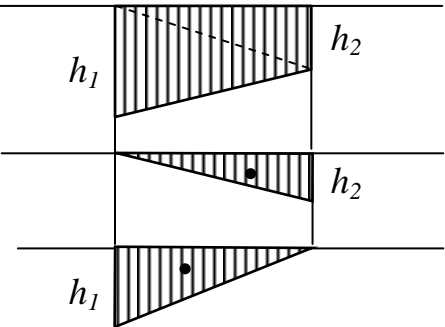
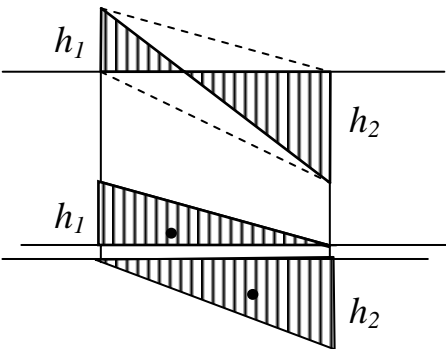
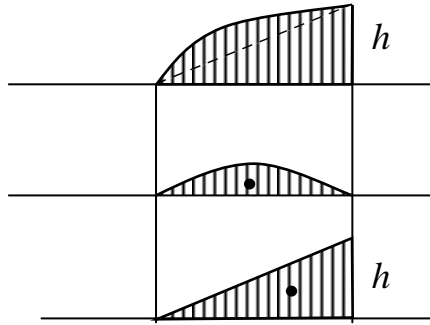
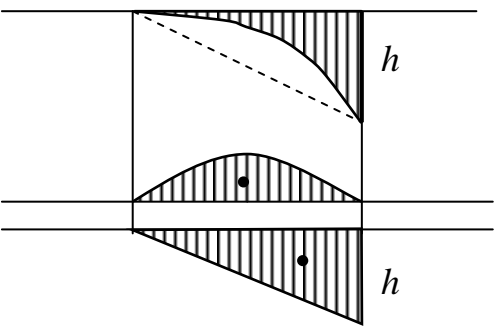
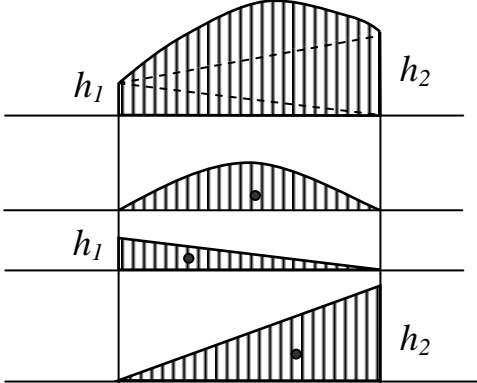
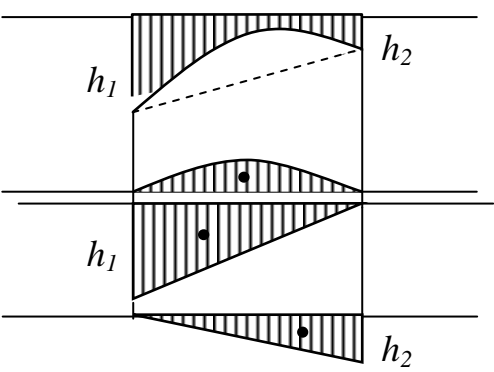
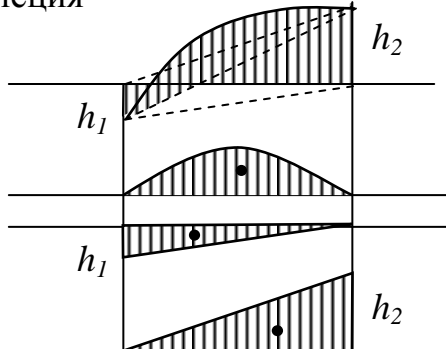
$$\theta_{max} = \sum \int \frac{M_x \overline{M}_2 \cdot dz}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \sum \int M_x \overline{M}_2 dz = \frac{1}{EI_x} \left(\left\{ \frac{1}{2} l \cdot Fl \right\} [1] \right) = \frac{Fl^2}{2EI_x}.$$

Сечение поворачивается в направлении единичного момента.

Простые составляющие эпюр

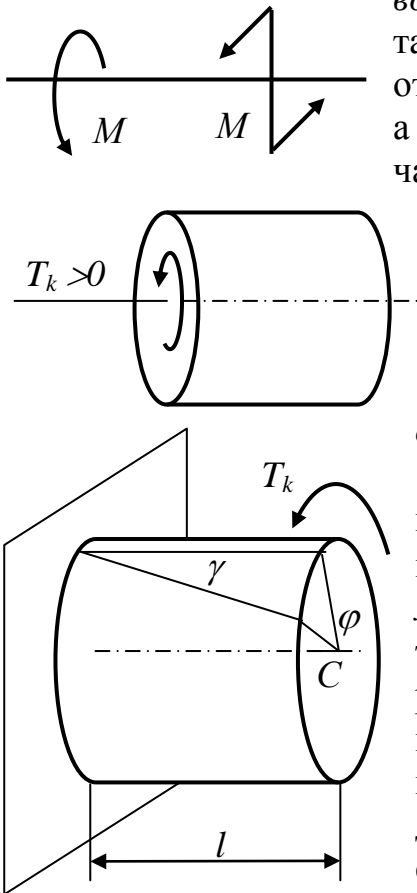
Фигура	Площадь
<p>Прямоугольник</p> 	$A=Lh$
<p>Треугольник</p> 	$A=\frac{1}{2} Lh$
<p>Параболический сегмент</p> 	$A=\frac{q(L)^3}{12},$ где q – интенсивность равномерно распределенной нагрузки

Примеры разбивки сложных эпюр на простые составляющие

<p>Трапеция</p> 	<p>Трапеция</p> 
<p>Перекрученная трапеция</p> 	<p>Параболический треугольник</p> 
<p>Параболический треугольник</p> 	<p>Параболическая трапеция</p> 
<p>Параболическая трапеция</p> 	<p>Перекрученная параболическая трапеция</p> 

Тема 6. КРУЧЕНИЕ

Кручением называется вид деформации, при котором в сечении детали возникает только крутящий момент T_k . Деталь, работающая на кручение, называется валом. Ось отличается от вала тем, что она не нагружена крутящим моментом, а работает на изгиб. Внешние моменты на валу обозначаются круговой стрелкой или парой сил, при этом стрелка находится всегда перед валом. При неизвестном значении внешнего момента его вычисляют через мощность на валу: $M=P/\omega$.

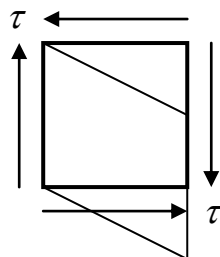
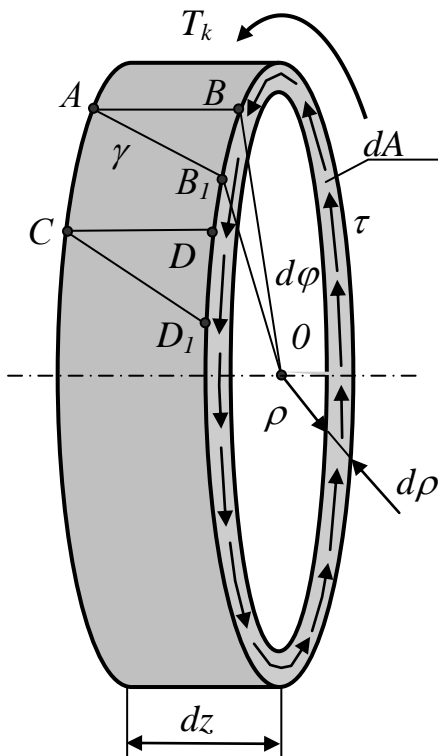


Внутренний крутящий момент в сечении T_k на схемах всегда направляется *против хода часов*, глядя на сечение со стороны внешней нормали.

При действии крутящего момента T_k сечение поворачивается на угол φ к своему первоначальному положению. Угол поворота сечения φ называется *углом закручивания вала* и является абсолютной характеристикой деформации при кручении. При этом образующая на цилиндрической поверхности вала повернется на угол γ , который является углом сдвига, и примет вид винтовой линии. Следовательно, цилиндрическая поверхность вала при кручении находится в состоянии чистого сдвига, и в поперечном сечении вала возникают только касательные напряжения.

6.1. Напряжения и деформации при кручении

Вырежем из вала двумя поперечными сечениями диск бесконечно малой толщины dz , из которого двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho+d\rho$ вырежем полый цилиндр с бесконечно малой толщиной стенки $d\rho$. На поверхности цилиндра нанесем две образующие AB и CD . Левый торец цилиндра будем считать неподвижным. При приложении крутящего момента T_k правое сечение цилиндра повернется на угол $d\varphi$, точка B перейдет в положение B_1 , точка D – в положение D_1 . Элемент $ABCD$ находится в состоянии чистого сдвига. Выразим перемещение BB_1 из



Элемент $ABCD$ находится в состоянии чистого сдвига. Выразим перемещение BB_1 из

треугольника ABB_1 ($BB_1=AB \cdot \operatorname{tg} \gamma \approx dz \cdot \gamma$) и сектора OBB_1 ($BB_1=\rho \cdot d\varphi$). Приравняв выражения, получим $\gamma=\rho \cdot (d\varphi/dz)$.

Отношение угла закручивания к длине вала $d\varphi/dz=\theta$ представляет собой *относительный угол закручивания*. Итак, угол сдвига $\gamma=\rho \cdot \theta$, тогда величина касательных напряжений определится из выражения закона Гука (*). Выразим величину крутящего момента в сечении через касательные напряжения с учетом (*):

$$\tau=G \cdot \gamma=G \theta \rho \quad (*)$$

$$T_k=\int_A(\tau \cdot dA) \cdot \rho=\int_A(G \theta \rho \cdot dA) \cdot \rho=G \theta \cdot \int_A \rho^2 dA=G \theta \cdot I_p,$$

где интеграл $\int_A \rho^2 dA=I_p$ представляет собой полярный момент инерции сечения

$$\theta=\frac{T_k}{G I_p} \quad (65)$$

относительный угол закручивания

$$\varphi=\frac{T_k \cdot \ell}{G I_p} \quad (66)$$

угол закручивания

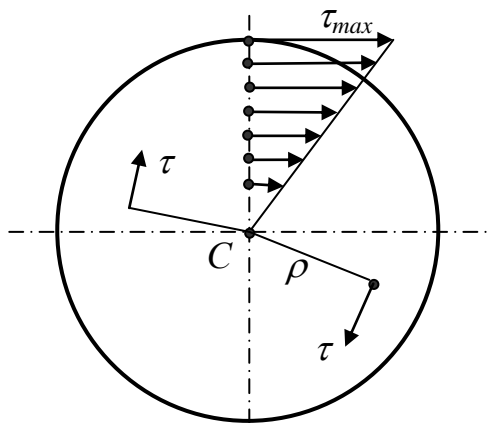
вала. Отсюда получаем расчетную формулу для определения относительного угла закручивания вала (65). Тогда полный угол закручивания будет определяться выражением (66). Подставив значение (65) в (*), получим формулу (67) для определения касательных напряжений в любой точке сечения вала на расстоянии ρ от его центра.

$$\tau=\frac{T_k}{I_p} \rho \quad (67)$$

напряжения в любой точке сечения

Из анализа формулы (67) следует:

- касательные напряжения в любой точке поперечного сечения при кручении направлены по перпендикуляру к радиусу данной точки;
- величина напряжений пропорциональна удалению точки сечения от его центра;
- в центре сечения напряжения отсутствуют;
- напряжения достигают максимума в наружных слоях материала;
- рациональным сечением при кручении является полый круг.



Чтобы получить максимальных значений подставим в (67) вместо радиуса значение ρ_{max} и, зная $I_p/\rho_{max}=W_p$ полярный момент сопротивления, полу-

$$\tau_{max}=\frac{T_k}{W_p} \quad (68)$$

максимальные напряжения при кручении

выражение для напряжений, сто текущего заменив относительным моментом чим (68).

6.2. Условие прочности при кручении

Заменив левую часть общего условия прочности по касательным напряжениям $\tau_{max} \leq [\tau]$ на выражение (68), получим условие прочности при кручении (69).

$$\frac{T_k}{W_p} \leq [\tau]_{кр} \quad (69)$$

условие прочности
при кручении

При расчете вала на прочность необходимо вначале построить эпюру крутящего момента T_k .

Если вал проектируется гладкий (постоянного сечения по всей длине), то в качестве расчетного крутящего момента берется с эпюры

максимальное значение по абсолютной величине $|T_k|_{max}$. В том случае, если вал предполагается сделать ступенчатым, расчет ведется на каждом участке отдельно по своему значению крутящего момента.

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$$

для сплошного
сечения

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - k^4)$$

для полого сечения

Вспомним выражения для полярного момента сопротивления. Здесь $k = d/D$ – отношение внутреннего диаметра трубы к внешнему диаметру.

Полученное в результате расчета значение диаметра нужно округлить до нормального размера, но если на участке вала расположен подшипник, необходимо диаметр вала согласовывать со стандартным диаметром отверстия внутреннего кольца подшипника. Ориентировочно можно использовать ряд значений диаметров кратных 5 мм.

6.3. Условие жесткости при кручении

Валы в точных механизмах дополнительно рассчитываются на *жесткость*. Этим расчетом ограничивается деформация вала (обычно относительный угол закручивания $\theta_{max} \leq [\theta]$). Значения нормативного (допускаемого) угла

$$\frac{|T_k|_{max}}{GI_p} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leq [\theta] \quad (70)$$

условие жесткости
при кручении

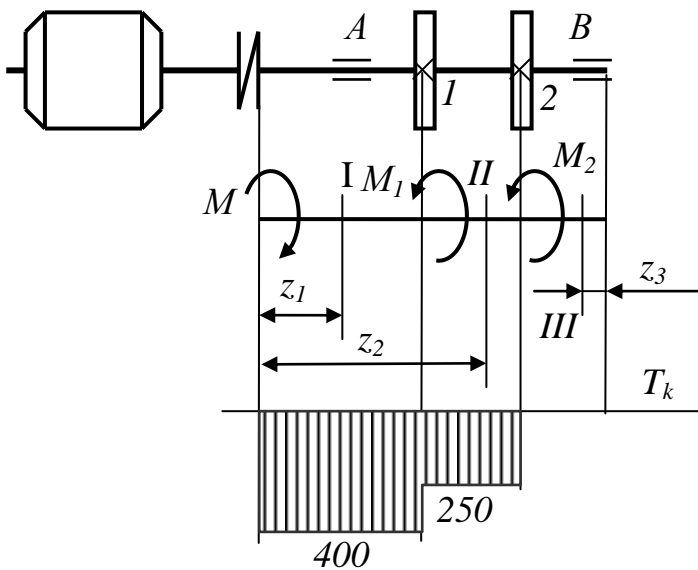
закручивания в машиностроении колеблются в пределах $[\theta] = (0,2 \div 1)$ град/м в зависимости от назначения и конструктивных особенностей механизма. Учитывая, что допускаемый угол закручивания чаще всего задается в градусах, условие жесткости будет иметь вид (70). Так как расчет по условию жесткости

дает значения диаметров большие по сравнению с расчетом на прочность, то использование последнего типа расчета должно быть обоснованным.

Пример расчета вала на прочность и жесткость

Вал приводится во вращение от двигателя через муфту. От вала приводятся в движение через шкивы 1 и 2 два механизма мощностью соответственно $P_1 = 15$ кВт и $P_2 = 25$ кВт. Угловая скорость вращения вала $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$. Найти размеры сечений ступенчатого вала из условий прочности и жесткости при кручении. Материал вала – *сталь 30*. Допускаемый относительный угол закручивания вала принять равным $[\theta] = 0,5$ град/м.

Решение



Определяем внешние моменты, действующие на вал в точках крепления шкивов,

$$M_1 = P_1 / \omega = 15 \cdot 10^3 / 100 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = P_2 / \omega = 25 \cdot 10^3 / 100 = 250 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

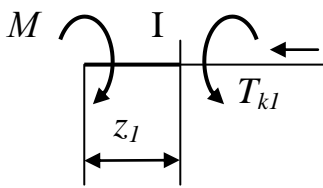
Тогда значение момента на муфте будет

$$M = M_1 + M_2 = 150 + 250 = 400 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Изображаем расчетную схему вала в виде его оси с удаленными шкивами и муфтой, в точках крепления шкивов и муфты прикладываем соответствующие внешние моменты. Направления моментов на шкивах и на муфте, очевидно,

должны быть противоположными.

Строим эпюру крутящего момента. Рассекаем вал поперечной плоскостью на первом участке. Отбрасываем правую часть. К сечению проводим внешнюю нормаль и, глядя со стороны внешней нормали, проставляем внутренний момент T_{k1} против хода часовой стрелки. Составляем уравнение равновесия первого участка $T_{k1} + M = 0$,



откуда $T_{k1} = -M = -400 \text{ Н} \cdot \text{м} = \text{const}$.

На втором участке поступаем аналогично.

$$T_{k2} - M_1 + M = 0,$$

отсюда $T_{k2} = M_1 - M = 150 - 400 = -250 \text{ Н} \cdot \text{м} = \text{const}$.

На третьем участке отбрасываем левую часть вала. Справа моментов нет, следовательно, $T_{k3} = 0$.

По полученным значениям строим эпюру T_k .

Рассчитываем вал на прочность. В условие прочности при кручении (69)

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16|T_k|}{\pi[\tau]_{кр}}}$$

подставляем выражение полярного момента сопротивления круглого сплошного сечения и получаем расчетную формулу для определения диаметра. Величина допускаемых напряжений на кручение стали 30 $[\tau]_{кр} = 125 \text{ МПа}$.

Вычисляем диаметры сечений по участкам, выбирая значения крутящих моментов с эпюры:

$$D_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 400}{\pi \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0254 \text{ м} = 25,4 \text{ мм}; \quad D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 250}{\pi \cdot 125 \cdot 10^6}} = 0,0217 \text{ м} = 21,7 \text{ мм};$$

$$D_3 \geq 0.$$

Полученные значения округляем:

$D_1 = 30 \text{ мм}$ – до значения отверстия подшипника; $D_2 = 22 \text{ мм}$ – до нормального размера; $D_3 = 20 \text{ мм}$ – до размера подшипника с учетом возможности прохода через участок шкива 2 при сборке.

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot |T_k|}{\pi^2 G [\theta]}}$$

Рассчитываем вал на жесткость. Подставив в условие жесткости при кручении (70) выражение полярного момента инерции круглого сечения, получим расчетную формулу для определения диаметра вала из условия жесткости.

Вычисляем диаметры по участкам:

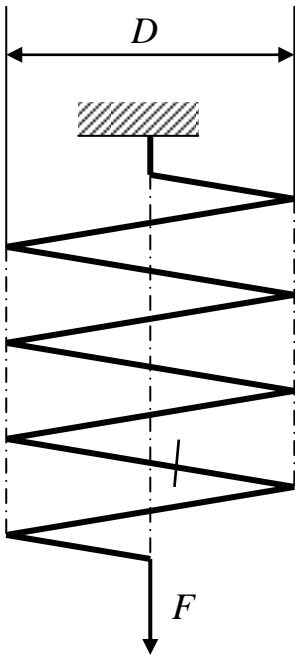
$$D_1 \geq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 400}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 0,0492 \text{ м}; \quad D_2 \geq \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 250}{\pi^2 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,5}} = 0,0437 \text{ м}; \quad D_3 \geq 0.$$

Полученные значения округляем: $D_1=50 \text{ мм}$; $D_2=45 \text{ мм}$; $D_3=40$.

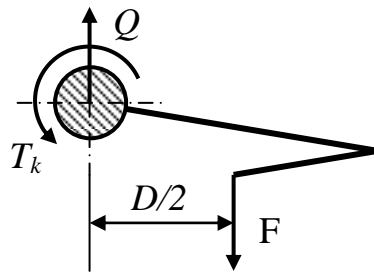
Как видим, величины диаметров по условию жесткости значительно превосходят их размеры из условия прочности.

6.4. Приближенный расчет витых цилиндрических пружин

Одним из технических приложений теории кручения является приближенный расчет витых пружин.



Введем следующие обозначения:
 D – средний диаметр витка пружины;
 d – диаметр сечения проволоки пружины;
 $c=D/d$ – индекс пружины;
 n – общее количество витков пружины;
 m – число рабочих витков; у пружин растяжения $m=n$, для пружин сжатия $m=n-2$, так как торцевые витки за счет сил трения выключены из работы.



Применяя метод сечений, нетрудно заметить, что в сечении проволоки возникают небольшие по величине изгибающий момент и продольная сила, а также поперечная сила $Q=F$ и крутящий момент $T_k=FD/2$. По величине касательные напряжения сдвига обычно составляют 2÷5% от напряжений кручения, поэтому *основным видом деформации* при работе пружины считают *кручение*, а остальные виды деформации учитываются в поправочном коэффициенте.

Из формулы (68) $\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p}$, где $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$; $T_k = \frac{FD}{2}$,

получаем значение максимальных напряжений в пружине $\tau_{\max} = \frac{8FD}{\pi d^3} = \frac{8F \cdot c}{\pi d^2}$.

$$\frac{8F \cdot c}{\pi d^2} k \leq [\tau]_{кр} \quad (71)$$

условие прочности пружины

$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c} \quad (72)$$

поправочный коэффициент

Тогда условие прочности пружины с учетом поправочного коэффициента будет иметь вид (71). Значение поправочного коэффициента определяется по эмпирической формуле (72).

Проектировочный расчет пружины на прочность состоит в следующем:

- необходимо задаться величиной индекса пружины из стандартного ряда значений (без всяких ограничений можно использовать значения индекса 5, 6, 7, 8, 9) и подсчитать величину поправочного коэффициента (72);
- из условия прочности (71) определяется диаметр проволоки пружины, округляется до стандартного размера и вычисляется средний диаметр витка.

Число рабочих витков пружины определяется из условия жесткости, которое ограничивает верхнее или нижнее значение ее деформации.

Характеристикой деформации пружины является ее осадка (или ход пружины) λ – перемещение торца пружины при ее растяжении или сжатии. Выражение для осадки получим, приравняв работу внешней силы A и потенциальную энергию упругой деформации пружины Π . Работа внешней силы F при ее статическом приложении на перемещении λ – $A = (1/2)F\lambda$. Потенциальная энергия при кручении равна работе внутреннего крутящего момента T_k на перемещении φ (66)

$$\Pi = 1/2 \cdot T_k \varphi = [1/2 \cdot T_k] \cdot [(T_k l) / (GI_p)] = T_k^2 l / (2GI_p) = 8F^2 D^3 m / (2Gd^4),$$

где l – длина рабочей части проволоки пружины $l = \pi D m$;

$$I_p = \pi d^4 / 32;$$

$$T_k = FD/2.$$

$$\lambda = \frac{8FD^3 m}{Gd^4} = \frac{8Fc^3 m}{Gd} \quad (73)$$

осадка пружины

Приравняв работу и потенциальную энергию, получим выражение для осадки пружины, которое используется для определения числа рабочих витков пружины при заданной величине ее осадки.

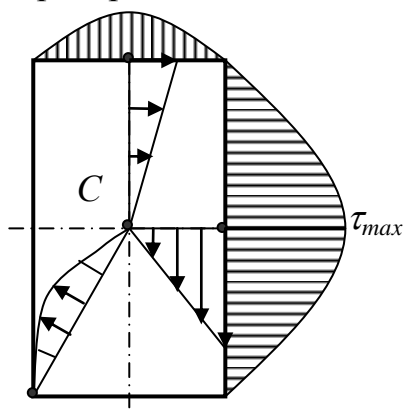
6.5. Кручение стержней некруглого поперечного сечения

При кручении стержней некруглого сечения поперечные сечения при деформации перестают быть плоскими (происходит *депланация* сечений), поэтому методами сопротивления материалов решить эти задачи нельзя.

В расчетах используются результаты, полученные методами *теории упругости*.

Для качественного анализа явлений часто применяется *метод аналогий*, который заключается в том, что разные физические процессы могут описываться одними дифференциальными уравнениями. Применение аналогий

дает возможность зрительно представить процессы, которые нельзя увидеть. Так, распределение касательных напряжений в сечении стержня при кручении



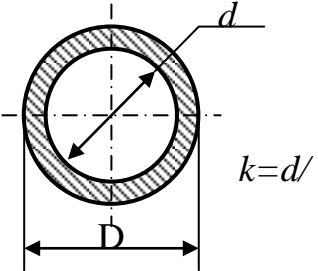
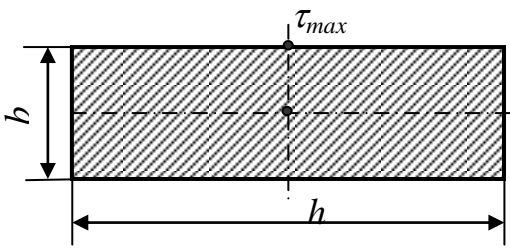
аналогично распределению скоростей потока жидкости при ее вращательном движении в емкости такой же формы (*гидродинамическая аналогия*). Например, при вращательном движении жидкости в баке прямоугольного сечения в центре бака и во внутренних углах скорость движения будет равна нулю. Максимум скорости будут иметь частицы жидкости у границы бака посередине длиной стороны. Следовательно, такой же закон распределения

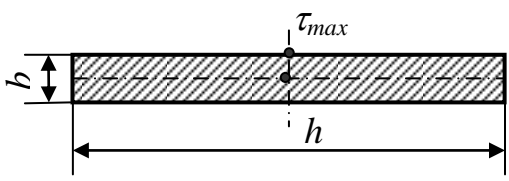
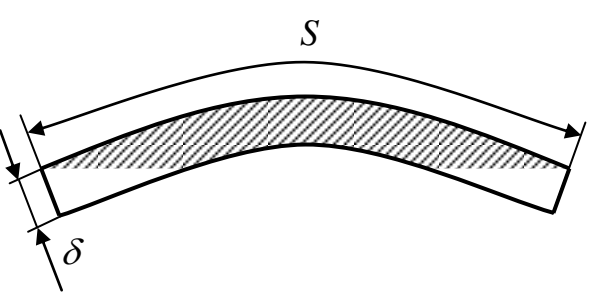
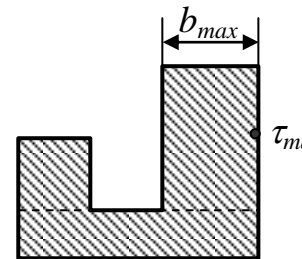

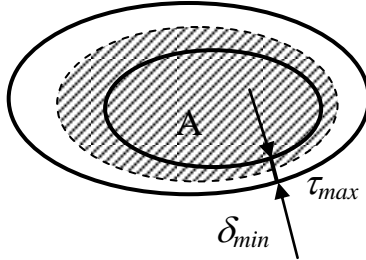
будут иметь и касательные напряжения при кручении стержня прямоугольного сечения.

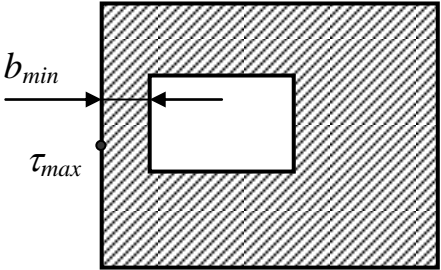
Согласно выводам теории упругости, максимальные касательные напряжения и угол закручивания при любой форме сечения стержня можно определить по формулам:

$$\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_k}; \quad \varphi = \frac{T_k l}{G \cdot I_k},$$

где W_k и I_k не имеют физического смысла, являются абстрактными величинами, значения которых зависят от формы и размеров сечения. Значения W_k и I_k можно брать из следующей таблицы.

Сечения	W_k	I_k
Круглое, трубчатое 	$W_k = W_p = \pi D^3 (1 - k^4) / 16$	$I_k = I_p = \pi D^4 (1 - k^4) / 32$
Прямоугольное 	$W_k = \alpha h b^2$ τ_{\max} – в середине длинной стороны	$I_k = \beta h b^3$
	b – малая сторона прямоугольника	
	Значения α, β – из справочника в зависимости от соотношения h/b Для квадрата $\alpha=0,208; \beta=0,141$	

 <p>Тонкостенная по</p> <p>лоса $h > 10b$</p>	$W_k = (1/3)hb^2$ <p>τ_{max} – в середине длинной стороны</p>	$I_k = (1/3)hb^3$
<p>Тонкостенный открытый профиль</p> 	$W_k = (1/3)S\delta^2$	$I_k = (1/3)S\delta^3$
<p>Состоящее из прямоугольников</p> 	$W_k = I_k / b_{max}$	$I_k = (1/3) \sum h_i \cdot b_i^3$
<p>Профили стандартного проката</p>  <p>разбиваются на прямоугольники</p>	$W_k = I_k / b_{max}$	$I_k = (1/3) \eta \sum h_i \cdot b_i^3$ <p>$\eta = 1, 2$ для двутавра; $\eta = 1, 1, 2$ для швеллера; $\eta = 1$ для уголков</p>
<p>Тонкостенный закрытый профиль</p>  <p>A – площадь, охватываемая средней линией профиля</p>	$W_k = 2A\delta_{min}$ <p>формула Бредта</p>	$I_k = \frac{4A^2}{\oint \frac{dS}{\delta}}$

<p>Закрытый профиль</p>  <p>A – площадь, охватываемая средней линией профиля</p>	$W_k = 2Ab_{min}$	$I_k = \frac{4A^2}{\sum \frac{h_i}{b_i}}$
--	-------------------	---

Тема 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Виды деформации, при которых в сечении детали возникает несколько внутренних силовых факторов, называют *сложным сопротивлением*. При этом напряженное состояние материала может быть *простым* (если в сечении возникают только нормальные напряжения) и *сложным* (в остальных случаях).

При простом напряженном состоянии нормальные напряжения от отдельных видов деформации алгебраически складываются. К видам сложного сопротивления при простом напряженном состоянии можно отнести, пренебрегая сдвигом, сложные формы изгиба (*косой и пространственный*) и *сочетание изгиба с растяжением или сжатием*.

7.1. Сложные формы изгиба: косой и пространственный

Косой изгиб вызывается нагрузкой, лежащей в одной плоскости (силовая плоскость) при несовпадении ее ни с одной из главных плоскостей инерции балки. Ось балки при косом изгибе представляет собой плоскую кривую.

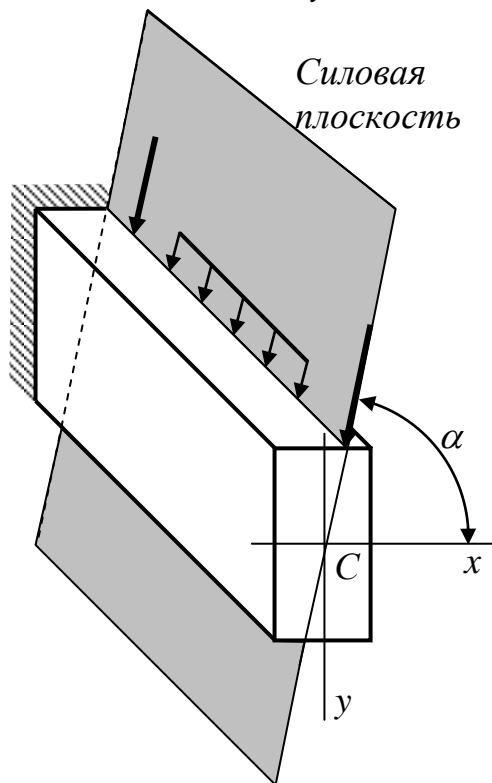
Пространственный изгиб возникает при действии на балку пространственной системы сил. При этом изогнутая ось балки является пространственной кривой.

Обе формы сложного изгиба имеют много общего, поэтому рассмотрим их параллельно.

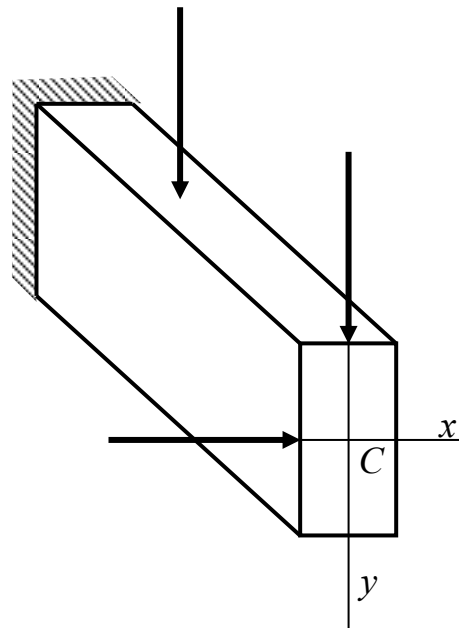
Косой изгиб

Схема нагружения

x, y – главные оси инерции сечения

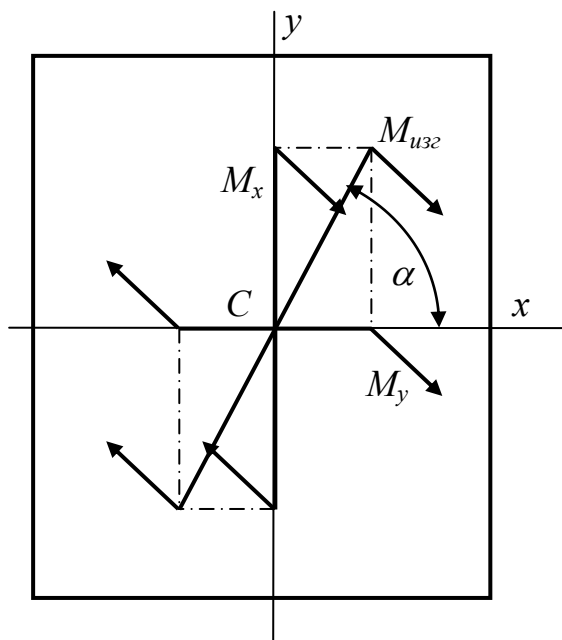


Пространственный изгиб



Пространственная нагрузка раскладывается на направления главных осей инерции сечения

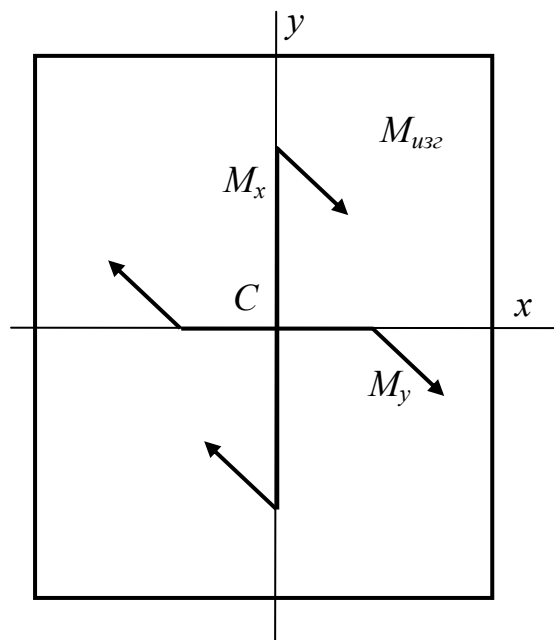
Внутренние силовые факторы в сечении



В сечении возникает один момент $M_{узг}$. Эпюра изгибающих моментов одна. Составляющие изгибающего момента относительно главных осей инерции:

$$M_x = M_{узг} \cdot \sin \alpha;$$

$$M_y = M_{узг} \cdot \cos \alpha.$$



В сечении возникают два момента M_x и M_y относительно главных осей инерции. При расчете необходимо строить две эпюры изгибающих моментов для двух главных плоскостей инерции балки.

Напряжения в любой точке сечения

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

где x, y – координаты точки в главных осях инерции

$$\sigma = M_{изг} \left(\frac{\sin\alpha}{I_x} y + \frac{\cos\alpha}{I_y} x \right)$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

Уравнение нейтральной линии

$$\sigma = 0$$

x, y – переменные

$$\left(\frac{\sin\alpha}{I_x} y + \frac{\cos\alpha}{I_y} x \right) = 0 -$$

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0 -$$

– уравнение прямой, проходящей через начало координат (центр сечения),
или в другом виде:

$$y = kx = \operatorname{tg}\beta \cdot x,$$

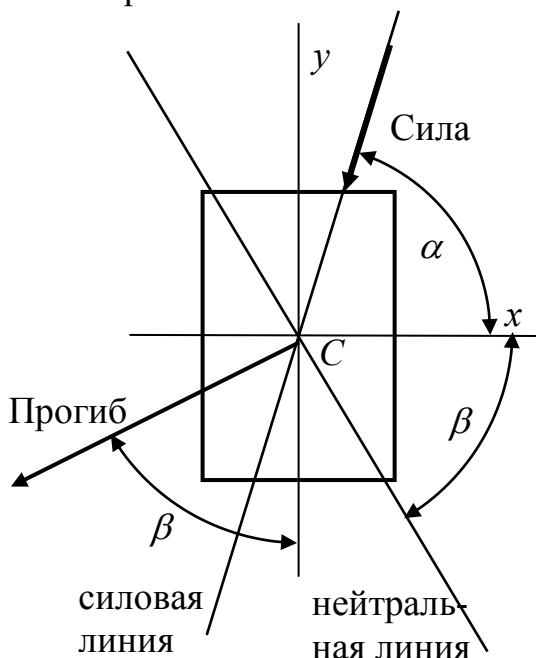
где β – угол между нейтральной линией и осью x

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg}\alpha -$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{I_x}{I_y} \frac{M_y}{M_x} -$$

– постоянен по всей длине балки, следовательно, изогнутая ось является плоской кривой.

– меняется по длине балки, следовательно, изогнутая ось балки – пространственная кривая.



Уравнение силовой линии

$$y = k_1 x = \operatorname{tg}\alpha \cdot x.$$

Условие перпендикулярности силовой и нейтральной линий

$$k_1 = \frac{1}{k}$$

выполняется при условии равенства главных значений моментов инерции сечения

$$I_x = I_y$$

следовательно, при косом изгибе силовая и нейтральная линии не взаимно перпендикулярны. А так как направление прогиба всегда перпендикулярно нейтральной линии, то при косом изгибе направление прогиба не совпадает с силовой плоскостью. Поэтому изгиб и назван косым. Очевидно, что для сечений с равными главными моментами инерции понятие косоугольного изгиба отсутствует (изгиб всегда прямой).

Значение максимальных напряжений в сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

$$\sigma_{\max} = |M_{uzg}|_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_x} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right)$$

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \right)_{\max}$$

Положение опасного сечения

Положение опасного сечения определяется эпюрой M_{uzg}

Положение опасного сечения не очевидно, его приходится находить, сравнивая значения напряжений в нескольких сечениях

Условие прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_{uzg}$$

$$|M_{uzg}|_{\max} \left(\frac{\sin \alpha}{W_x} + \frac{\cos \alpha}{W_y} \right) \leq [\sigma]_{uzg}$$

$$\left(\frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \right)_{\max} \leq [\sigma]_{\acute{e}\check{c}\tilde{a}}$$

или в более удобном виде для расчета

$$\frac{|M_{uzg}|_{\max}}{W_x} \left(\sin \alpha + \frac{W_x}{W_y} \cos \alpha \right) \leq [\sigma]_{uzg}$$

условие прочности при косом изгибе (74)

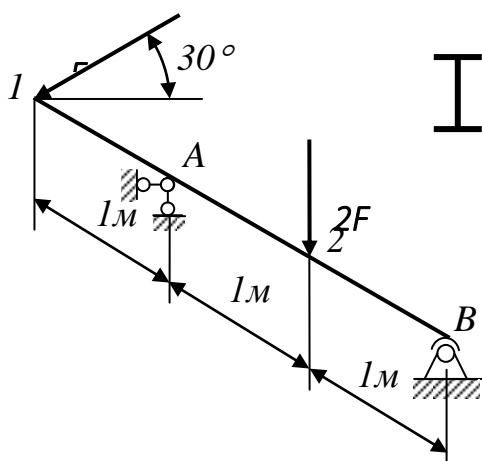
$$\frac{1}{W_x} \left(|M_x| + \frac{W_x}{W_y} |M_y| \right)_{\max} \leq [\sigma]_{\acute{e}\check{c}\tilde{a}}$$

условие прочности при пространственном изгибе (75)

- В условиях прочности (74), (75) два неизвестных: W_x и W_y . Чтобы решение стало возможным, необходимо задать их соотношение $\frac{W_x}{W_y}$. Для прямо-

угольного сечения $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b}$. Для прокатных профилей можно задать их ориентировочное соотношение (для двутавра ≈ 8 , для швеллера ≈ 6), но после определения номера профиля обязателен поверочный расчет при истинных значениях моментов сопротивления сечения.

Пример расчета на прочность при пространственном изгибе



$$Y_I = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН.}$$

Определяем опорные реакции в вертикальной плоскости.

$$\sum(m_x)_A = Y_I \cdot 1 - 2F \cdot 1 + Y_B \cdot 2 = 0, \text{ отсюда}$$

$$Y_B = (1/2) \cdot (-Y_I \cdot 1 + 2F \cdot 1) = 0,5 \cdot (-5 \cdot 1 + 2 \cdot 10 \cdot 1) = 7,5 \text{ кН.}$$

$$\sum(m_x)_B = Y_I \cdot 3 + 2F \cdot 1 - Y_A \cdot 2 = 0, \text{ отсюда}$$

$$Y_A = 0,5(Y_I \cdot 3 + 2F \cdot 1) = 0,5(5 \cdot 3 + 2 \cdot 10) = 17,5 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum Y = -Y_I + Y_A - 2F + Y_B = -5 + 17,5 - 2 \cdot 10 + 7,5 = 0.$$

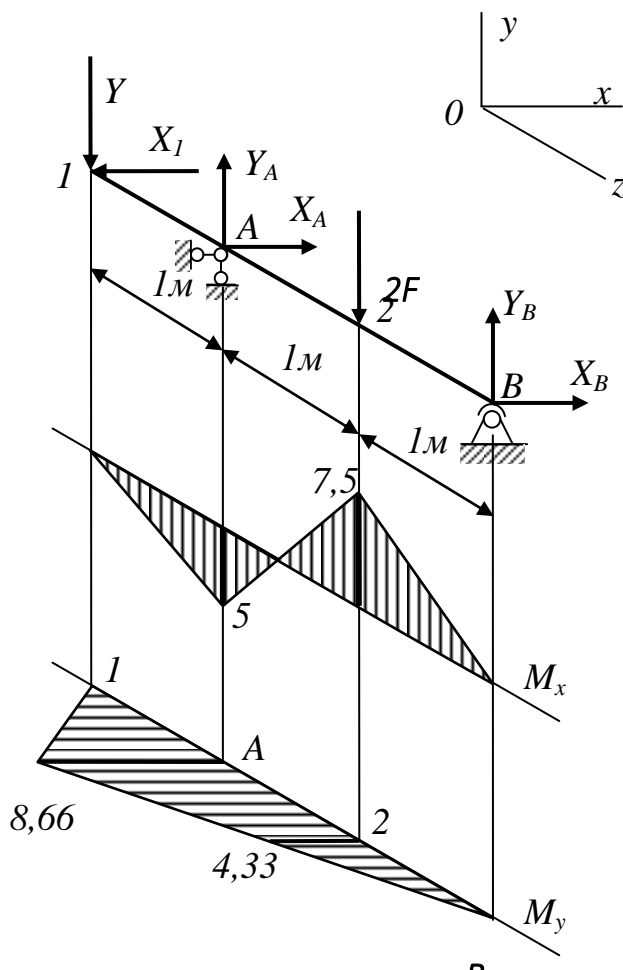
Строим эпюру изгибающего момента в вертикальной плоскости. Эпюра состоит из отрезков прямой линии без разрывов, поэтому ограничимся определением значений момента M_x на границах участков:

Балка нагружена двумя силами, перпендикулярными оси балки. Сила $2F$ направлена вертикально, сила F – под углом 30° к горизонту. Сечение балки – двутавровое, материал – сталь $Ст3$, $F=10$ кН. Определить номер стандартного двутавра.

Решение

Разложим силу F на направления главных осей инерции сечения:

$$X_I = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН;}$$



$$(M_x)_I = (M_x)_B = 0;$$

$$(M_x)_A = -Y_I \cdot l = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$(M_x)_2 = +Y_B \cdot l = +7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру, откладывая полученные значения по вертикали.

Определяем опорные реакции в горизонтальной плоскости, глядя на балку сверху.

$$\Sigma(m_y)_A = X_I \cdot 1 + X_B \cdot 2 = 0, \text{ отсюда } X_B = -0,5X_I = -4,33 \text{ кН}.$$

$$\Sigma(m_y)_B = X_I \cdot 3 - X_A \cdot 2 = 0, \text{ отсюда } X_A = (3/2)X_I = +12,99 \text{ кН}.$$

Проверка: $\Sigma X = -X_I + X_A + X_B = -8,66 + 12,99 - 4,33 = 0$.

Значения изгибающего момента M_y на границах участков:

$$(M_y)_I = (M_y)_B = 0;$$

$$(M_y)_A = -X_I \cdot l = -8,66 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$(M_y)_2 = +X_B \cdot l = -4,33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим график, откладывая полученные значения горизонтально.

Опасным сечением балки может быть сечение A или сечение 2 . Находим значения напряжений в этих сечениях, приняв соотношение $W_x/W_y = 8$:

$$\sigma_A = \frac{1}{W_x} \left(|M_x|_A + \frac{W_x}{W_y} |M_y|_A \right)_{\max} = \frac{1}{W_x} (|-5| + 8 \cdot |-8,66|) = \frac{74,28}{W_x};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{W_x} \left(|M_x|_2 + \frac{W_x}{W_y} |M_y|_2 \right)_{\max} = \frac{1}{W_x} (|+7,5| + 8 \cdot |4,33|) = \frac{42,14}{W_x}.$$

Следовательно, опасным сечением балки является сечение A .

Рассчитываем балку на прочность по опасному сечению.

Из условия прочности $\sigma_{\max} = \sigma_A = \frac{74,28}{W_x} \leq [\sigma]_{\text{дсд}}$ находим величину момента

$$\text{сопротивления двутавра } W_x \geq \frac{74,28}{[\sigma]_{\text{дсд}}} = \frac{74,28 \cdot 10^3}{150 \cdot 10^6} 10^6 = 495 \text{ см}^3$$

По таблице сортамента принимаем двутавр №30а, имеющий значения моментов сопротивления $W_x = 518 \text{ см}^3$ и $W_y = 60,1 \text{ см}^3$.

Проверяем сечение при фактических значениях моментов сопротивления.

Максимальное значение напряжений в опасном сечении

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{W_x} \left(|M_x|_A + \frac{W_x}{W_y} |M_y|_A \right)_{\max} = \frac{10^3}{518 \cdot 10^{-6}} \left(|-5| + \frac{518}{60,1} |-8,66| \right) = 153,8 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составляет $\Delta = [(153,8 - 150) / 150] \cdot 100\% = 2,5\%$, что допускается.

Пример расчета при косом изгибе

Двутавровая балка №60 перекрытия предназначена для работы на изгиб в вертикальной плоскости. При установке балки на опоры ее ось симметрии отклонилась от вертикали на 2 градуса. Как отразится неточность, допущенная при монтаже балки, на ее прочности?

Решение

При правильной установке балки изгиб будет плоским, и максимальные напряжения в ней будут определяться по формуле

$$\sigma_a = M_{изг} / W_x,$$

где $M_{изг}$ – изгибающий момент в вертикальной плоскости.

При наклонной установке двутавра изгиб становится косым, и максимальные напряжения должны вычисляться по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_b &= 1/W_x \cdot (M_x + W_x/W_y \cdot M_y) = M_{изг} / W_x \cdot (\sin 88^\circ + W_x/W_y \cdot \cos 88^\circ) = \\ &= M_{изг} / W_x \cdot (0,9994 + 2560/182 \cdot 0,0349) = M_{изг} / W_x \cdot 1,49 = 1,49 \cdot \sigma_a, \end{aligned}$$

где $\alpha = 88^\circ$;

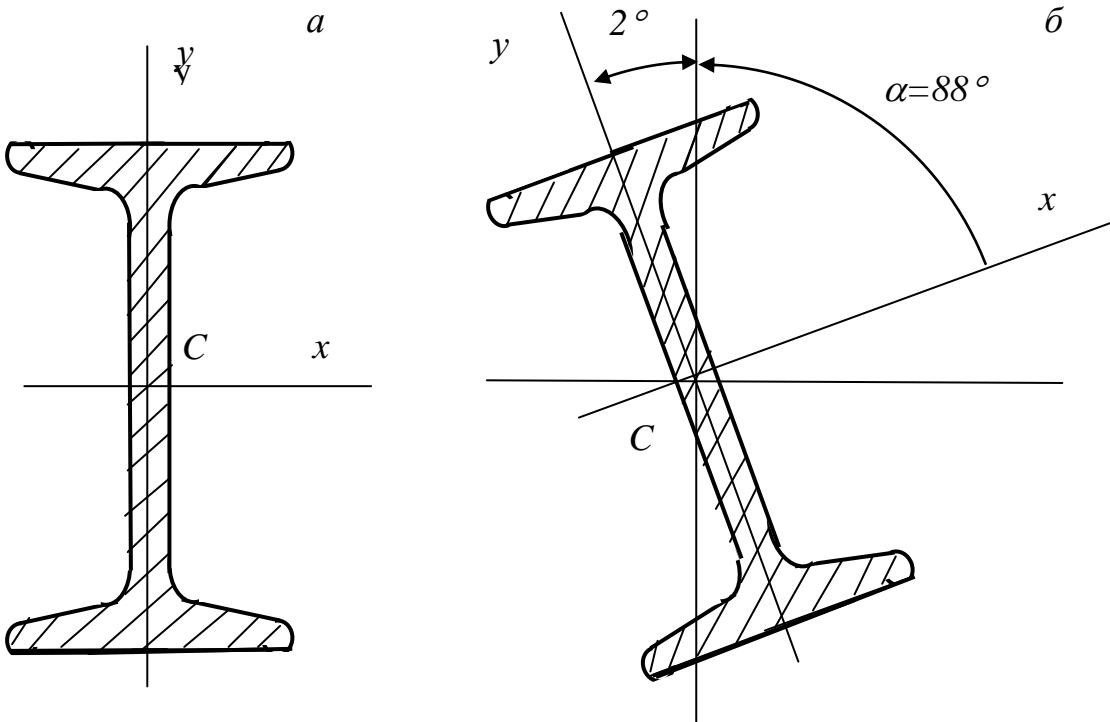
$$\sin 88^\circ = 0,9994;$$

$$\cos 88^\circ = 0,0349;$$

$$W_x = 2560 \text{ см}^3,$$

$$W_y = 182 \text{ см}^3 \text{ – моменты сопротивления двутавра №60.}$$

Таким образом, напряжения от ошибки при монтаже возрастут в 1,49 раза, следовательно, прочность балки уменьшится в 1,49 раз.



7.2. Изгиб с растяжением

При пространственном изгибе с растяжением, если пренебречь сдвигом, в сечении детали возникает три внутренних силовых фактора: M_x , M_y , N , которые являются равнодействующими нормальных напряжений. Значение напряжений определится алгебраической суммой составляющих

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \text{ Уравнение нейтральной линии}$$

$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$ представляет собой уравнение прямой не проходящей че-

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]_p \quad (76)$$

условие прочности при изгибе с растяжением

рез центр сечения. Максимальные значения напряжений возникнут в точке сечения наиболее удаленной от нейтральной линии

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \text{ Тогда условие}$$

прочности для сечений с двумя осями симметрии будет иметь вид (76).

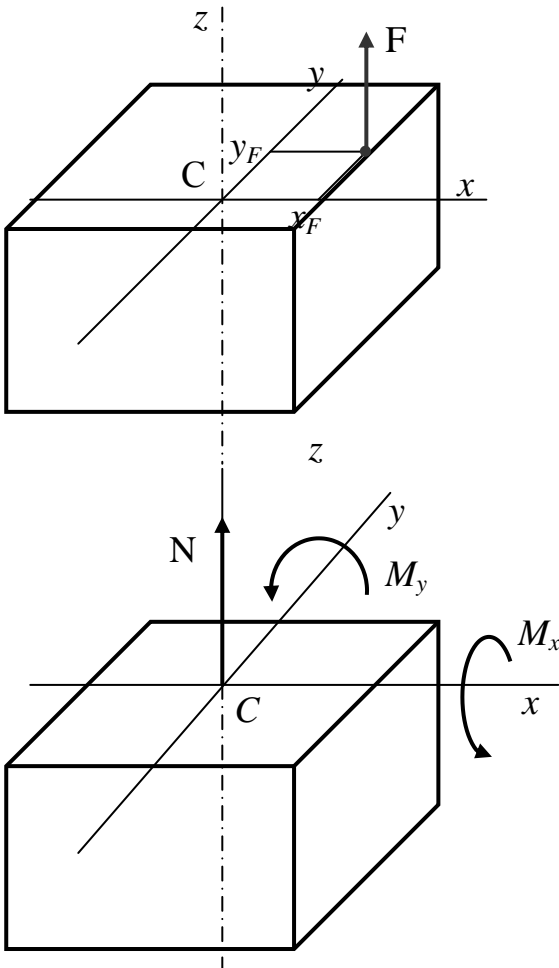
Внецентренное растяжение и сжатие

В частном случае изгиб с растяжением (сжатием) возникает при действии на деталь продольной силы, не совпадающей с продольной осью детали (*вне-*

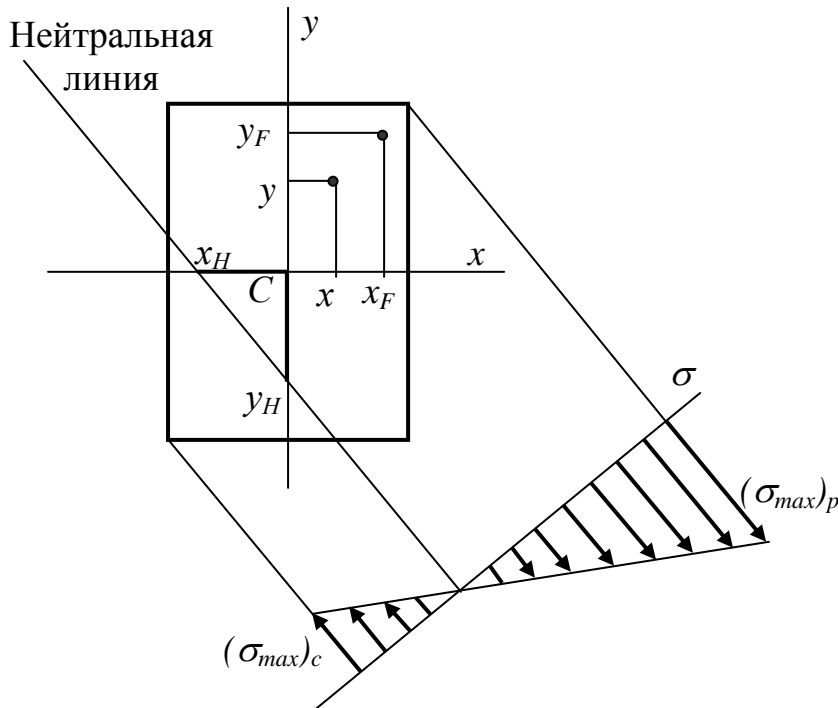
центренное растяжение или сжатие). В этом случае в поперечном сечении возникают продольная сила $N=F$ и два изгибающих момента $M_x=F \cdot y_F$, $M_y=F \cdot x_F$, где x_F , y_F – координаты точки приложения внешней силы в главных осях инерции сечения. Величина нормальных напряжений в произвольной точке сечения с координатами $(x; y)$ определится выражением

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \\ &= F \left(\frac{1}{A} + \frac{y_F}{I_x} y + \frac{x_F}{I_y} x \right). \end{aligned}$$

Уравнение нейтральной линии в сечении $\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F}{I_x} y + \frac{x_F}{I_y} x \right) = 0$ – уравнение прямой линии, не проходящей через центр сечения.



Определим отрезки, которые отсекает нейтральная линия на главных осях инерции сечения.



$$\begin{cases} x_H = -\frac{I_y}{A \cdot x_F}; \\ y_H = -\frac{I_x}{A \cdot x_F}. \end{cases} \quad (77)$$

отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных осях инерции сечения

Эпюра нормальных напряжений в сечении показывает, что в сечении могут возникнуть напряжения двух знаков: растяжения и сжатия.

Внецентренное сжатие характерно для опорных конструкций: фундаментов, оснований, которые изготавливаются из хрупких материалов (кирпич, бетон, цементный раствор). Хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению, поэтому для них появление растягивающих напряжений является недопустимым.

Чтобы в конструкции возникали напряжения одного знака, нейтральная линия не должна проходить через поперечное сечение, в крайнем случае, может только касаться его. Из (77) следует, что это возможно, если внешняя сила будет находиться вблизи центра сечения, то есть при относительно малых значениях координат $F(x_F; y_F)$.

Область вокруг центра сечения, приложение внутри которой продольной силы приводит к возникновению в сечении напряжений одного знака, называется ядром сечения.

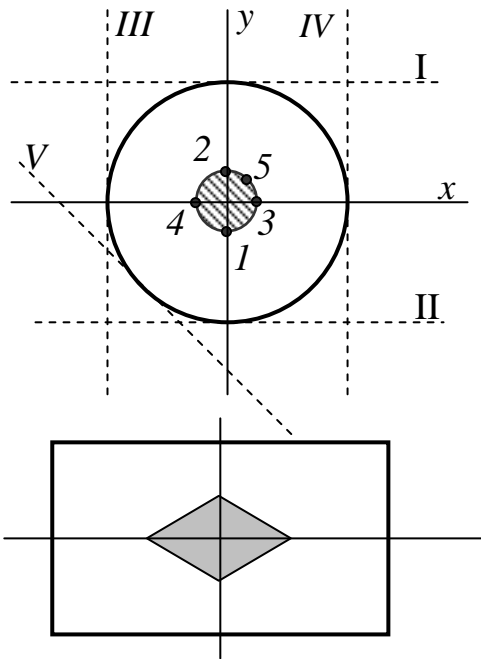
$$\begin{cases} x_F = -\frac{I_y}{A \cdot x_H}; \\ y_F = -\frac{I_x}{A \cdot x_H}. \end{cases} \quad (78)$$

координаты точки контура ядра сечения

Для определения контура ядра сечения из (77) выразим координаты точки приложения силы F . Задав положение нейтральной линии по касательной к сечению, из (78) найдем координаты точки приложения силы, соответствующей данному положению нейтральной линии. Повторив процедуру несколько раз, определим достаточное для построения контура ядра сечения количество точек.

В качестве примера определим контур ядра круглого сечения диаметром d . Геометрических характеристик круглого сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4}; \quad I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}.$$



Проведем нейтральную линию I по касательной через верхнюю точку сечения. Отрезки, которые она отсекает на осях: $x_H = \infty$, $y_H = +d/2$. Подставив значения в (78), определим координаты точки 1(0; $-d/8$) контура ядра сечения. Положению нейтральной линии II ($x_H = \infty$; $y_H = -d/2$) соответствует точка 2(0; $+d/8$) контура. Положению нейтральной линии III ($x_H = -d/2$, $y_H = \infty$) соответствует точка 3($+d/8$; 0). Вполне очевидно, что ядром круглого сечения является круг диаметром $d/4$.

Аналогично можно показать, что ядром прямоугольного сечения является ромб с размерами диагоналей $h/3 \times b/3$.

В расчете на прочность при малых значениях гибкости, когда нет опасности потери устойчивости, можно использовать условие прочности (76), преобразовав его к виду (79). Знаки перед слагаемыми нужно ставить в зависимости от направления действия внутренних силовых факторов по отношению к рассматриваемой точке сечения. Необходимо также иметь в виду, что напряжения в опасных точках сечения могут иметь любой знак. Значения допускаемых напряжений следует выбирать в зависимости от материала (пластичный или хрупкий) и знака напряжений (растяжение или сжатие).

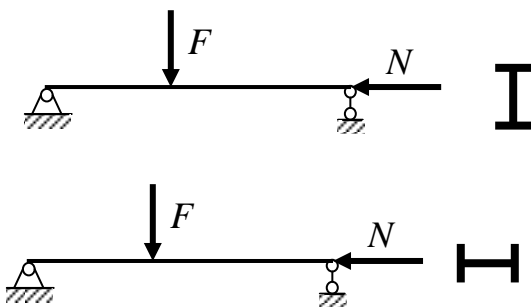
$$\left| \pm \frac{|N|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \right| \leq [\sigma] \quad (79)$$

условие прочности при изгибе с растяжением или сжатием

Знаки перед слагаемыми нужно ставить в зависимости от направления действия внутренних силовых факторов по отношению к рассматриваемой точке сечения. Необходимо также иметь в виду, что напряжения в опасных точках сечения могут иметь любой знак.

Значения допускаемых напряжений следует выбирать в зависимости от материала (пластичный или хрупкий) и знака напряжений (растяжение или сжатие).

7.3. Изгиб с сжатием гибких стержней (продольно-поперечный изгиб)



Расчет стержней средней и большой гибкости должен учитывать возможность потери его устойчивости. Здесь возможны два расчетных случая.

Поперечная нагрузка расположена в плоскости максимальной жесткости при изгибе. В этом случае размеры сечения определяются из условия прочности при поперечном изгибе в плоскости максимальной жесткости (без учета продольной силы). Затем сечение проверяется на устойчивость в плоскости минимальной жесткости от действия сжимающей силы.

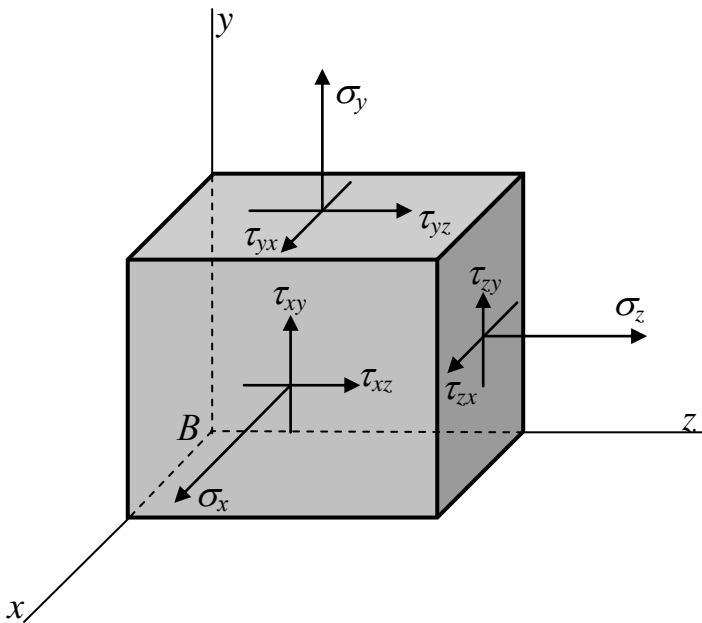
$$\sigma_{\max} = \frac{|N|}{A} + \frac{|M|_{\max}}{W_{\min} \left(1 - \frac{N}{N_{\text{Э}}} \right)} \leq [\sigma] \quad (80)$$

Поперечная нагрузка расположена в плоскости минимальной жесткости балки. В данном случае не имеет места один из основных принципов сопротивления материалов:

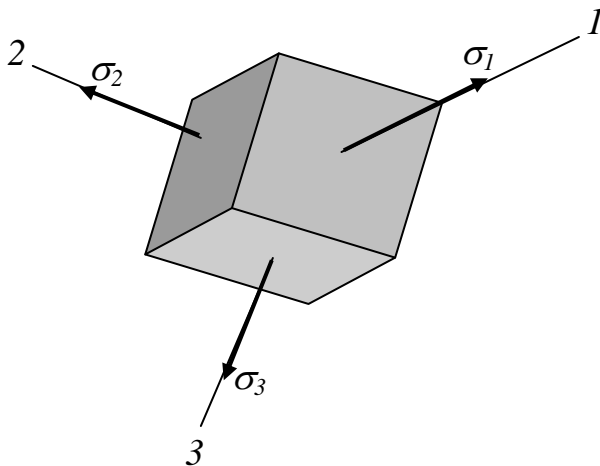
принцип независимости действия сил. Для проверки прочности сечения можно рекомендовать приближенную формулу (80), где $N_{\text{Э}}$ – критическое значение силы, полученное по формуле Эйлера (38). Приведенная формула дает удовлетворительные результаты при $N < 0,8N_{\text{Э}}$.

7.4. Понятие о напряженном состоянии в точке

Через точку в материале детали можно провести бесконечное множество секущих плоскостей, и в каждой из них будут действовать разные по величине напряжения. Совокупность напряжений, действующих во всевозможных сечениях, проходящих через точку,

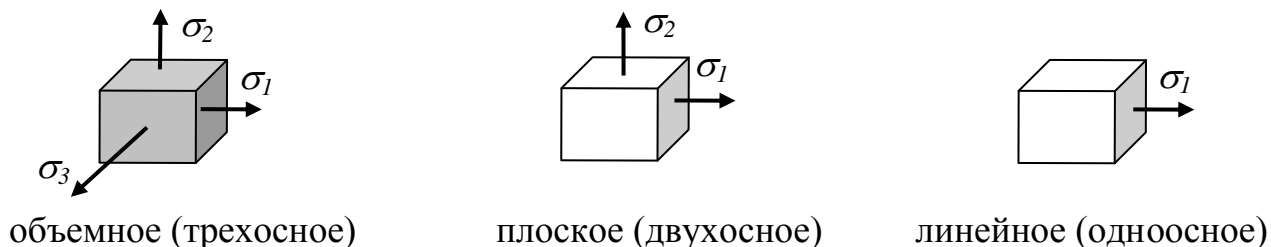


называется **напряженным состоянием** в данной точке. Для исследования напряженного состояния в окрестностях точки мысленно вырезают элементарный параллелепипед с бесконечно малыми сторонами и находят значения напряжений на его гранях: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Эти напряжения называют *исходными*. Первый индекс у касательных напряжений указывает на нормальную ось к данному сечению, второй индекс показывает направление напряжений. При стремлении ребер параллелепипеда к нулю, он будет стягиваться в точку, поэтому напряжения на его гранях характеризуют напряженное состояние в данной точке. В теории упругости доказывается теорема о том, что в окрестностях любой точки можно найти положение параллелепипеда (причем единственное), при котором на его гранях будут отсутствовать касательные напряжения.



При стремлении ребер параллелепипеда к нулю, он будет стягиваться в точку, поэтому напряжения на его гранях характеризуют напряженное состояние в данной точке. В теории упругости доказывается теорема о том, что в окрестностях любой точки можно найти положение параллелепипеда (причем единственное), при котором на его гранях будут отсутствовать касательные напряжения.

Грани такого параллелепипеда называют *главными площадками*; оси 1, 2, 3 нормальные к ним – *главными осями*; нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 – *главными напряжениями*. Главные оси нумеруют таким образом, чтобы выполнялось условие: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. По наличию главных напряжений различают три вида напряженного состояния:

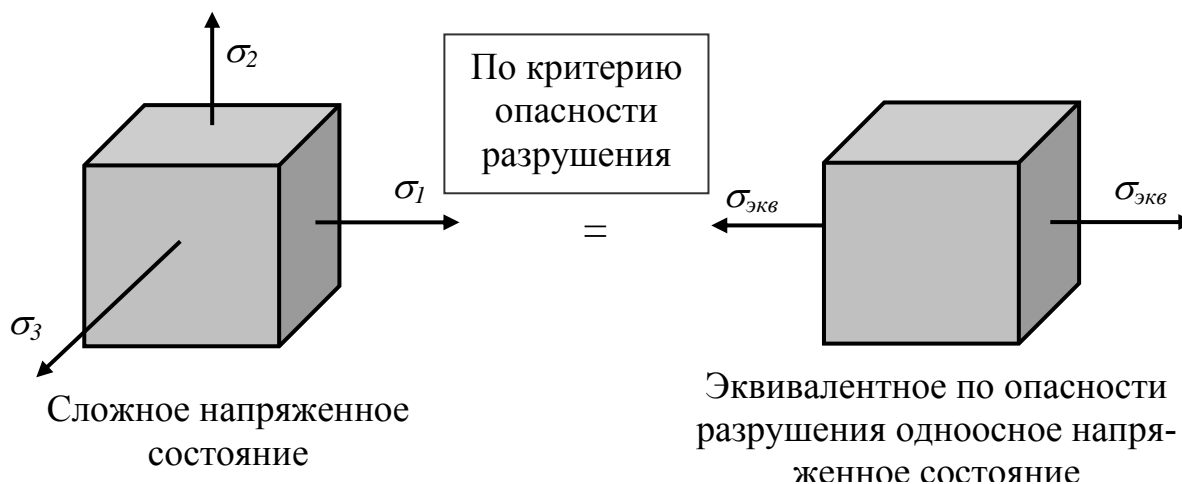


Значения главных напряжений являются объективной обобщенной характеристикой любого напряженного состояния. Поэтому целью исследования сложного напряженного состояния является нахождение значений главных напряжений.

7.5. Оценка прочности при сложном напряженном состоянии.

Гипотезы прочности

Оценка прочности при сложном напряженном состоянии производится по главным напряжениям. При этом *сложное напряженное состояние* мысленно (аналитически) *заменяется* одноосным (*эквивалентным*) напряженным состоянием, имеющим такую же опасность разрушения.



Естественно, что при такой замене должно соблюдаться равенство критерия опасности разрушения. Так как в настоящее время природа разрушения (наступления предельного состояния) материала до конца не ясна, существуют несколько гипотез (около 30), каждая из которых выдвигает свой критерий наступления предельного состояния материала – **гипотезы прочности**.

Рассмотрим наиболее распространенные в расчетной практике гипотезы прочности.

Гипотеза максимальных касательных напряжений (третья гипотеза прочности) – считает причиной наступления предельного состояния материала максимальные касательные напряжения. Поэтому условием равной опасности двух напряженных состояний (сложного и эквивалентного)

будет являться равенство: $\tau_{\text{сложн}}^{\text{max}} = \tau_{\text{экв}}^{\text{max}}$.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (81)$$

условие прочности по третьей гипотезе

Подставив сюда значения максимальных касательных напряжений $\tau_{\text{сложн}}^{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ и

$$\tau_{\text{экв}}^{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{2},$$

получим условие равноопасности по главным напряжениям: $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{экв}}$. Но так как при одноосном напряженном состоянии условие прочности имеет вид $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$, то получаем выражение для оценки прочности при сложном напряженном состоянии (81). Равенство (81) представляет собой условие равноопасности двух состояний, неравенство – условие прочности при сложном напряженном состоянии.

Третья гипотеза прочности дает удовлетворительную для практических расчетов точность, но ее нельзя применять для хрупких материалов.

Гипотеза удельной потенциальной энергии формоизменения (четвертая гипотеза прочности – энергетическая) считает критерием наступления предельного состояния материала удельную потенциальную энергию изменения формы. Условия равноопасности и прочности согласно этой гипотезе имеют вид (82).

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma] \quad (82)$$

условие прочности по четвертой гипотезе

Четвертая гипотеза прочности по сравнению с третьей дает результаты лучше соответствующие экспериментальным данным, но имеет тот же недостаток: ее нельзя применять к расчетам на прочность хрупких материалов.

Гипотеза прочности Мора в отличие от других гипотез является результатом обобщения экспериментальных данных и

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma] \quad (83)$$

условие прочности по гипотезе Мора

может применяться в расчетах на прочность, как пластичных материалов, так и хрупких. Условие прочности по этой гипотезе имеет вид (83), где $k = [\sigma]_p / [\sigma]_{\text{сж}}$ – коэффициент неравно-

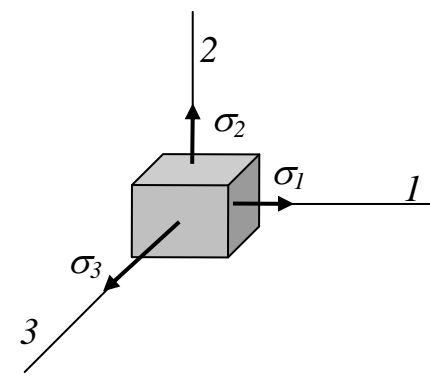
прочности материала при растяжении и сжатии. Для хрупких материалов $k < 1$, для пластичных материалов $k = 1$ и условие прочности по Мору совпадает с условием прочности по третьей гипотезе.

7.6. Обобщенный закон Гука

При сложном напряженном состоянии изменится выражение закона Гука.

Для линейного напряженного состояния справедлива зависимость (1) $\sigma = E\varepsilon$, или $\varepsilon = \sigma / E$, где ε – величина деформации в направлении действия напряжений (продольная деформация). Величина поперечной деформации определяется через коэффициент Пуассона материала (30) $\varepsilon_{\text{поперечн.}} = -\mu\varepsilon = -\mu\sigma / E$.

Применим формулы для продольной и поперечной деформации к сложному напряженному состоянию.

	Причина деформации	Деформация в направлении		
		1	2	3
	σ_1	$\frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_1}{E}$
	σ_2	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$	$\frac{\sigma_2}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_2}{E}$
	σ_3	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_3}{E}$	$\frac{\sigma_3}{E}$

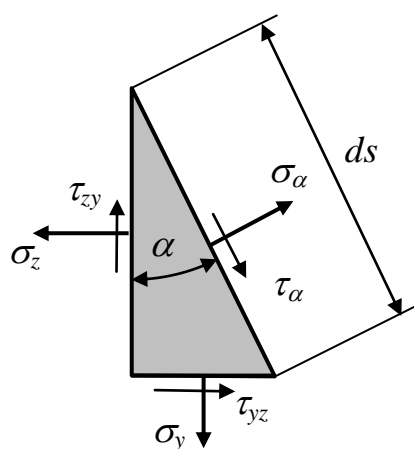
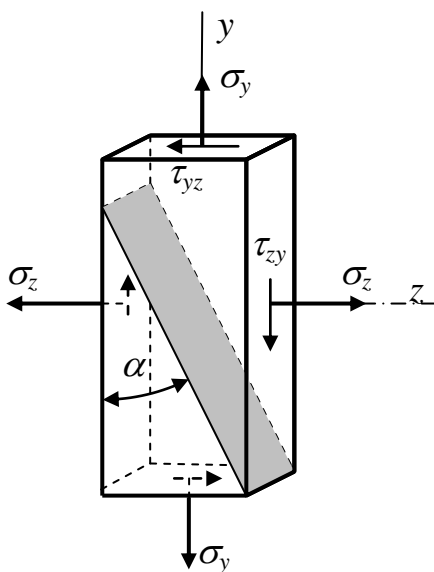
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{cases} \quad (84)$$

обобщенный закон Гука

Суммируя деформации в направлениях 1, 2, 3 от действия поочередно напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, получим выражение закона Гука при объемном напряженном состоянии – **обобщенный закон Гука** (84). Формулы обобщенного закона Гука справедливы не только для главных направлений, но и для любых направлений x, y, z .

7.7. Плоское напряженное состояние

Из элементарного параллелепипеда, находящегося в плоском напряженном состоянии, отсечем трехгранную призму и рассмотрим условия ее равновесия.



рассмотрим условия ее равновесия.

Спроецируем силы, действующие на гранях призмы, на направления нормали и касательной к наклонной

секущей плоскости. Обозначив толщину призмы dx и ширину наклонной грани ds , получим

$$\sigma_\alpha \cdot dx \cdot ds - \sigma_z \cdot \cos \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot \sin \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \sin \alpha + \tau_{yz} \cdot \sin \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \cos \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\tau_{\alpha} \cdot dx \cdot dz - \sigma_z \cdot \sin \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \cos \alpha - \sigma_y \cdot \cos \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \sin \alpha - \tau_{zy} \cdot \cos \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot \sin \alpha \cdot dx \cdot ds \cdot \sin \alpha = 0.$$

Откуда после сокращений

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha; \quad (*)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha. \quad (**)$$

Полученные формулы аналогичны зависимостям (15), (16) между моментами инерции сечения при повороте координатных осей. Поэтому, используя данную аналогию, некоторые заключения можно сформулировать без повторного вывода. Например:

– сумма нормальных напряжений при плоском напряженном состоянии постоянна для любых взаимно перпендикулярных сечений

$$\sigma_z + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2;$$

– положение главных площадок определяется значением угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\sigma} = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}; \quad (85)$$

– значения главных напряжений определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (86)$$

Для определения положения площадок с максимальными касательными напряжениями необходимо исследовать на экстремум функцию (**). Это исследование даст значение угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\tau} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2\tau_{zy}}. \quad (87)$$

Сравнив полученное значение угла с углом, определяющим положение главных площадок (85), приходим к выводу, что площадки с максимальными касательными напряжениями отклонены от главных площадок на угол 45° . Значения максимальных касательных напряжений определяются формулой

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$$

или через значения главных напряжений при любом напряженном состоянии

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (88)$$

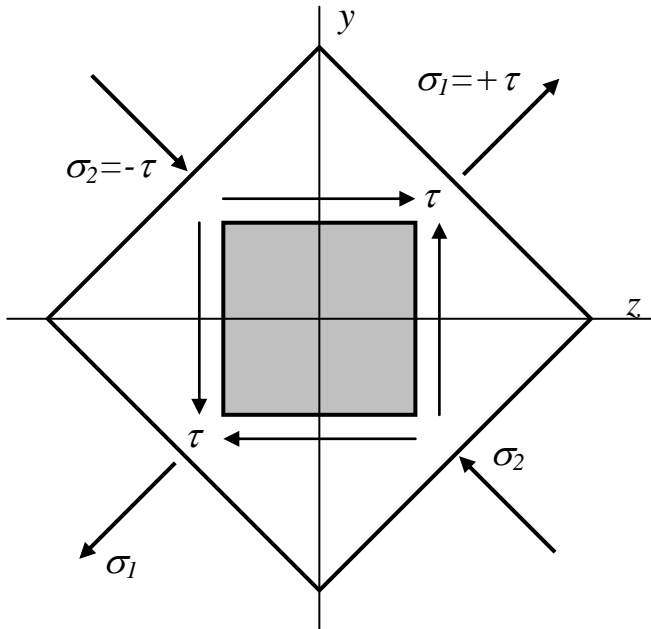
7.8. Сдвиг, как частный случай плоского напряженного состояния

При чистом сдвиге по четырем граням элементарного параллелепипеда будут действовать только касательные τ напряжения, равные между собой. Исходные напряжения этого напряженного состояния: $\sigma_z = \sigma_y = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$, то есть напряженное состояние плоское.

Определим по формуле (85) положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\sigma} = -\frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y} = \infty,$$

следовательно, главные площадки отклонены от исходных на угол $\pm 45^\circ$.



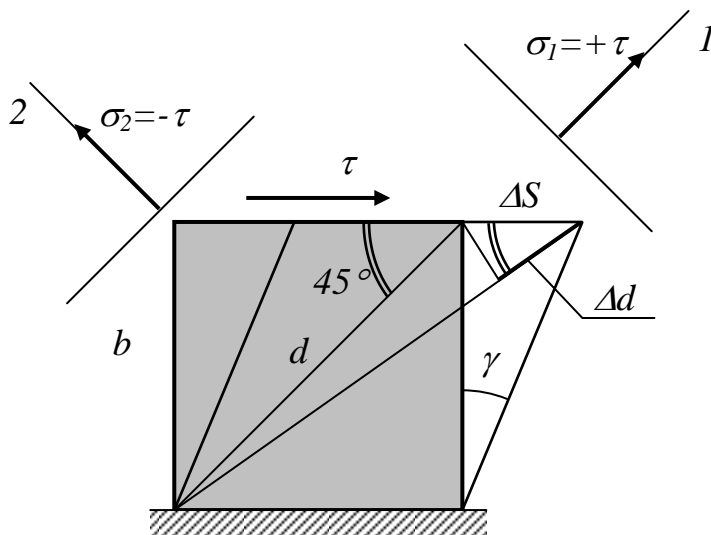
растягивающих напряжений.

Значения главных напряжений по формуле (86)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$$

$= \pm \tau$, то есть в одном из главных направлений действуют напряжения сжатия, в другом – растягивающие напряжения, которые могут привести к разрыву материала. Поэтому при кручении вала, изготовленного из хрупкого материала, при недостаточной прочности наблюдается разрушение под углом 45° к его оси от действия главных

Рассмотрим деформацию элемента размером $b \times b$ при чистом сдвиге.



Обозначим длину диагонали d . При малых деформациях угол 45° между диагональю и ребром существенно не изменится. Поэтому справедливо соотношение (*) между величиной абсолютного сдвига ΔS и удлинением Δd :

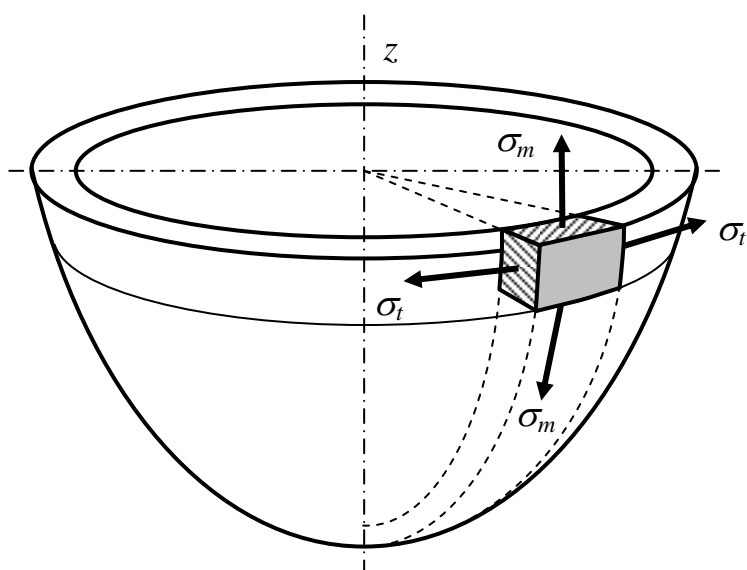
$$\Delta S = \sqrt{2} \Delta d. \quad (*)$$

Абсолютный сдвиг выразим через касательные напряжения, используя выражение закона Гука (1) по касательным напряжениям: $\Delta S = \gamma \cdot b = (\tau/G) \cdot b$. Удлинение диа-

гонали $\Delta d = \varepsilon_d \cdot d = \varepsilon_d \sqrt{2} b$ происходит в главном направлении 1, поэтому $\varepsilon_d = \varepsilon_1$ и $\Delta d = \varepsilon_1 \cdot d = \varepsilon_1 \sqrt{2} b$. Используя обобщенный закон Гука (84), получаем: $\varepsilon_1 = (1/E)(\sigma_1 - \mu\sigma_2) = (1/E)(\tau + \mu\tau) = \tau(1/E)(1 + \mu)$ и $\Delta d = \tau(1/E)(1 + \mu) \sqrt{2} b$. Подставив данные выражения в (*), после сокращений получим знакомую нам зависимость (49) между тремя упругими постоянными материала.

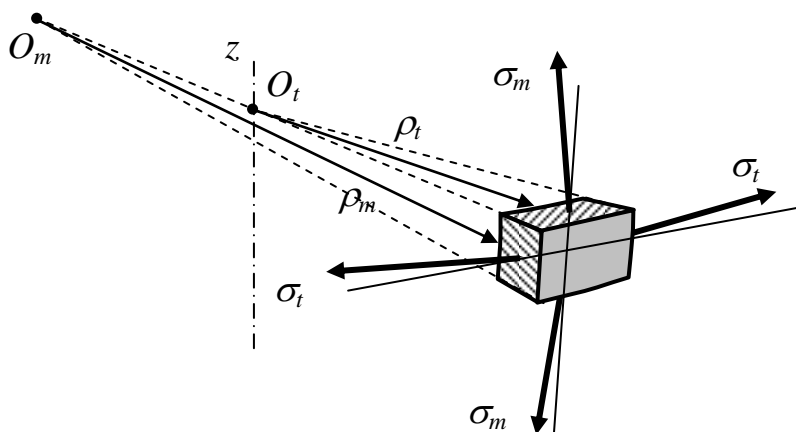
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

7.9. Расчет на прочность оболочек вращения



Для расчета оболочек, имеющих форму тел вращения, стенки которых тонки, не имеют резких переходов и изломов, при действии внутреннего, нормального к стенкам давления, обладающего осевой симметрией, используют безмоментную (мембранную) теория расчета.

В соответствии с этой теорией нормальные напряжения, возникающие в оболочке в кольцевом и меридиональном направлениях, связаны между собой уравнением Лапласа (89).

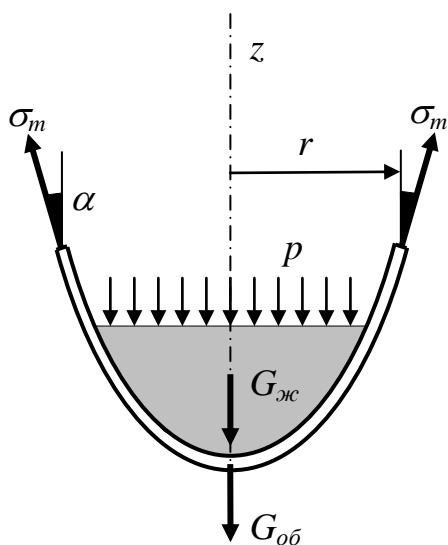


$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{\delta}, \quad (89)$$

уравнение Лапласа

где σ_m – нормальное меридиональное напряжение, направленное по касательной к меридиану радиуса ρ_m ; σ_t – окружное (кольцевое)

нормальное напряжение, направленное по касательной к окружности радиуса ρ_t ; p – внутреннее давление на оболочку; δ – толщина оболочки.



Для определения двух неизвестных σ_m и σ_t одного уравнения Лапласа недостаточно. Второе уравнение получают из условия равновесия части оболочки, отсеченной сечением, перпендикулярным меридианам на уровне рассматриваемой точки:

$$\sigma_m \delta 2\pi r \cos \alpha = p_2 \pi r^2 + Q_{ж} + Q_p, \quad (90)$$

где r – радиус окружности кольцевого сечения; α – угол между осью z и касательной к меридиану;

p_2 – внутреннее давление газа в сосуде;
 $Q_{ж}$ – вес жидкости или сыпучего груза в нижней части сосуда;

Q_p – собственный вес нижней части сосуда.

Из уравнения (90) определяют меридиональное нормальное напряжения σ_m , затем из уравнения (89) вычисляют нормальное окружное напряжение σ_t . Так как в меридиональных и окружных сечениях касательные напряжения отсутствуют, то полученные нормальные напряжения являются главными.

Рассмотрим наиболее простые примеры расчета оболочек.

Сферический сосуд радиуса R с внутренним давлением p .

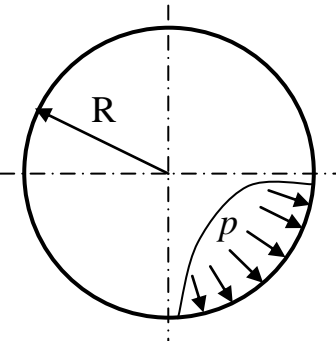
Из симметрии сферы следует, что

$$\rho_m = \rho_t = R, \text{ и } \sigma_m = \sigma_t = \sigma.$$

Тогда из уравнения Лапласа (89) получим

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta};$$

$$\sigma_3 = -p \approx 0.$$

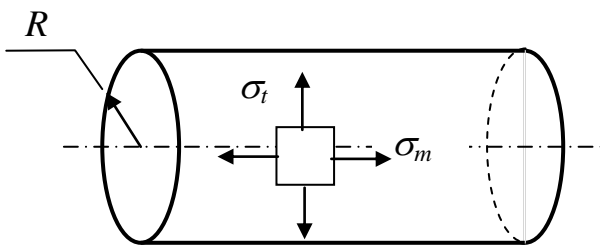


Подставив выражения главных напряжений в (81)–(83), получим по трем гипотезам прочности одно и то же условие прочности сферического сосуда:

$$\frac{pR}{2\delta} \leq [\sigma]_p.$$

Цилиндрический сосуд радиуса R с внутренним давлением p .

Рассекаем сосуд вертикальной плоскостью и составляем уравнение равновесия (90) для одной из частей:



$$\sigma_m \delta 2\pi R = p \pi R^2,$$

откуда определяем величину меридиональных напряжений

$$\sigma_m = \frac{pR}{2\delta}.$$

Подставив в уравнение Лапласа

значения σ_m , $\rho_t = R$, $\rho_m = \infty$, получим $\sigma_t = \frac{pR}{\delta}$,

то есть в два раза больше величины σ_m , следовательно,

$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pR}{\delta}; \quad \sigma_2 = \frac{pR}{2\delta}; \quad \sigma_3 = -p \approx 0.$$

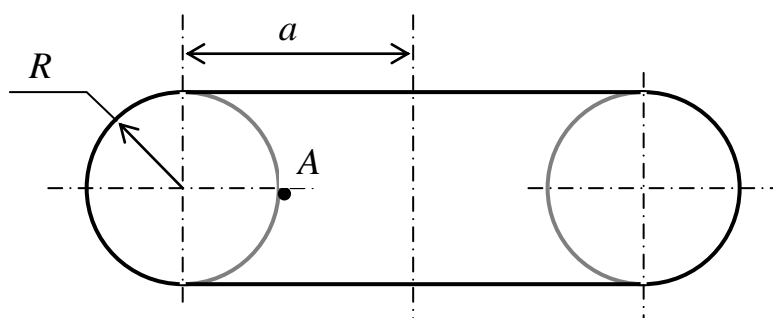
Тогда по гипотезам прочности – третьей и Мора – получаем условие прочности цилиндрического сосуда в следующем виде:

$$\frac{pR}{\delta} \leq [\sigma]_p.$$

Торговая оболочка с равномерным внутренним давлением p .

Величина окружных напряжений определяется

$$\text{формулой } \sigma_t = \frac{pR}{2\delta} = \sigma_2.$$

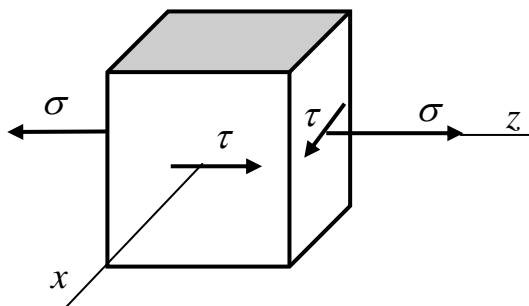


Максимальные меридиональные напряжения возникают в точках A , расположенных на внутренней окружности тора

$$(\sigma_m)_{\max} = \frac{pR(2a - R)}{2\delta(a - R)} = \sigma_I.$$

Формулы достаточно точны при $a \geq (2 \div 3)R$.

7.10. Расчет на прочность при действии нормальных и касательных напряжений



Часто в поперечном сечении детали возникают одновременно и нормальные и касательные напряжения. Так происходит при сочетании растяжения, сжатия, изгиба (нормальные напряжения) с кручением или срезом (касательные напряжения). Подобное напряженное состояние является плоским с исходными напряжениями:

$$\sigma_z = \sigma; \sigma_x = 0; \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau.$$

Значения главных напряжений (86):

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Подстановка значений главных напряжений в условия прочности по трем рассмотренным гипотезам (81)–(83) даст условия прочности (91).

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \end{array} \right. \quad (91)$$

условия прочности при действии нормальных и касательных напряжений

Полученные неравенства используются в основном для поверочных расчетов. При применении (91) в проектировочных расчетах неравенства будут содержать разные геометрические характеристики сечения,

куда искомые размеры войдут с разными степенями и найти его точное значение становится затруднительным.

Расчет на прочность при изгибе с кручением вала круглого сечения

Это тот случай, когда условия прочности (91) допускают точное определение диаметра сечения.

При изгибе с кручением в опасной точке сечения и нормальные и касательные напряжения достигают максимальных значений.

$$\text{Максимальное значение нормальных напряжений при изгибе } \sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

Максимальное значение касательных напряжений при кручении $\tau_{\max} = \frac{T_k}{W_p} = \frac{T_k}{2W_x}$. Подставив эти выражения напряжений в условия прочности

(91), получим (*), где W – осевой момент сопротивления сечения. Числитель

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + T_k^2}}{W} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75T_k^2}}{W} \leq [\sigma]; \\ \sigma_{\text{экв}}^{\text{M}} = \frac{\frac{1-k}{2}M_{\text{изг}} + \frac{1+k}{2}\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + T_k^2}}{W} \leq [\sigma]. \end{array} \right. \quad (*)$$

всех трех выражений (*) зависит от изгибающего и крутящего моментов и имеет размерность момента силы. Поэтому числитель можно считать неким абстрактным, несуществующим в природе, расчетным

моментом M_p , который как бы объединяет изгиб и кручение в один абстрактный, несуществующий в природе, вид деформации.

Тогда условия прочности (*) примут единый вид (92). Выражение (92) является условием прочности при изгибе с кручением.

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_p}{W} \leq [\sigma]_{\text{изг}} \quad (92)$$

условие прочности при изгибе с кручением

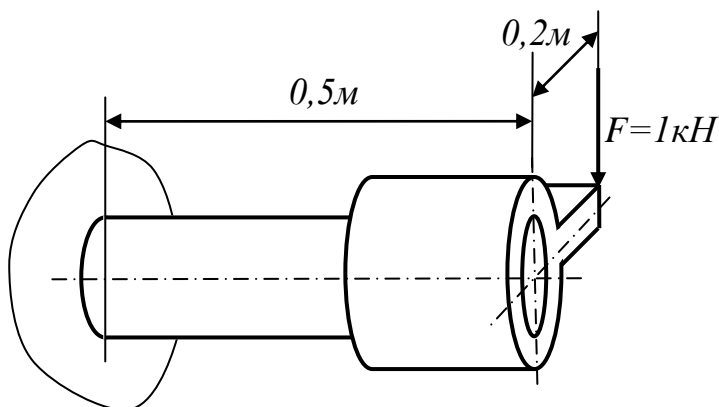
Величина расчетного момента вычисляется по одной из формул (93) в зависимости от используемой в расчете гипотезы прочности, где значения изгибающего и крутящего моментов берутся с соответствующих эпюр для опасного

$$M_p = \begin{cases} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + T_k^2} & - \text{ по третьей гипотезе прочности;} \\ \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75T_k^2} & - \text{ по четвертой гипотезе прочности;} \\ \frac{1-k}{2}M_{\text{изг}} + \frac{1+k}{2}\sqrt{M_{\text{изг}}^2 + T_k^2} & - \text{ по гипотезе прочности Мора.} \end{cases}$$

величина расчетного момента при изгибе с кручением (93)

сечения.

Пример проектировочного расчета вала

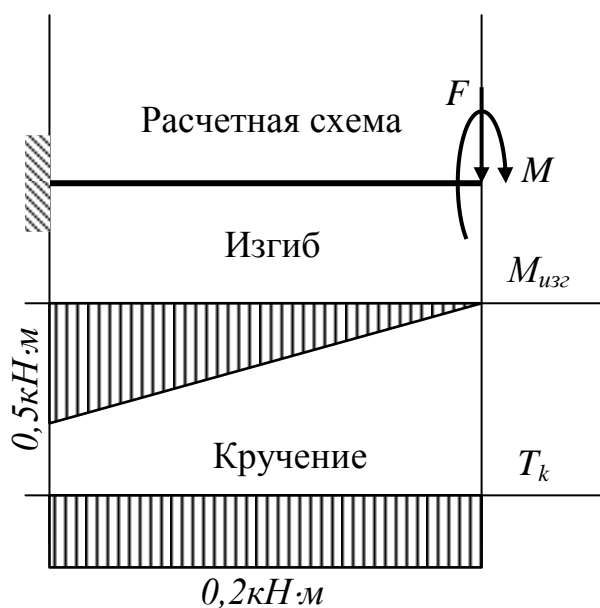


Определим необходимый диаметр вала с кривошипом. Материал – сталь 45.

Решение

Приводим силу, действующую на кривошип, к оси вала. Момент силы относительно оси вала $M = F \cdot 0,2 = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Строим эпюры изгибающего и крутящего моментов.



В опасном сечении вала:

$$M_{изг}=0,5\text{кН}\cdot\text{м}; T_k=0,2\text{кН}\cdot\text{м}.$$

В расчете используем четвертую гипотезу прочности. Расчетный момент в опасном сечении по этой гипотезе (93):

$$M_p^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75T_k^2} = 0,53\text{кН}\cdot\text{м}.$$

м.

Подставляем в условие прочности при изгибе с кручением (92) выражение осевого момента сопротивления сечения $W = \pi d^3/32$, откуда определяем необходимый диаметр вала при значении допускаемых напряжений на изгиб

для стали 45 [$\sigma_{изг}=240\text{МПа}$]:

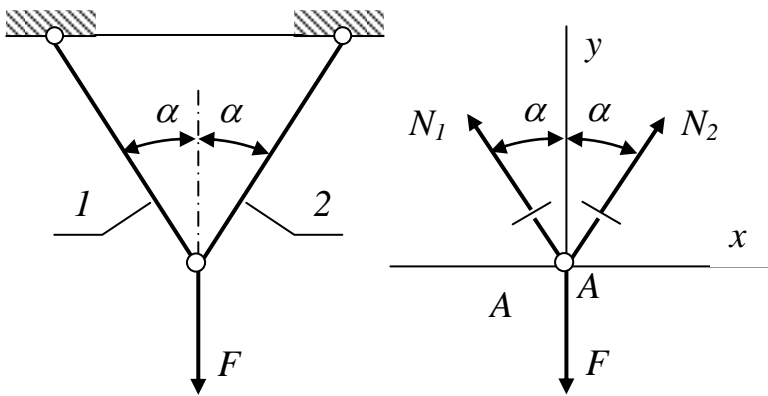
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{4M_p}{\pi[\sigma]_{\text{сц}}}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0,53 \cdot 10^3}{\pi \cdot 240 \cdot 10^6}} = 0,0141\text{м} = 14,1\text{мм}.$$

Полученное значение диаметра округляем до ближайшего значения из ряда нормальных размеров: $d=15\text{мм}$.

Тема 8. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ КОНСТРУКЦИИ

В основе определения опорных реакций конструкции и внутренних силовых факторов в сечениях ее элементов лежат уравнения статического равновесия или конструкции в целом, или ее отсеченной части. Если число неизвестных соответствует числу уравнений статики, конструкция называется **статически определимой**. Если число неизвестных превышает число уравнений, задача становится неопределимой, и конструкцию называют **статически неопределимой**. Различают статическую неопределимость внешнюю и внутреннюю. При внешней неопределимости «лишними» неизвестными являются опорные реакции. Если «лишними» неизвестными будут внутренние силовые факторы, то и статическую неопределимость называют внутренней.

8.1. Уравнения совместности деформаций



Рассмотрим пример плоской стержневой системы.

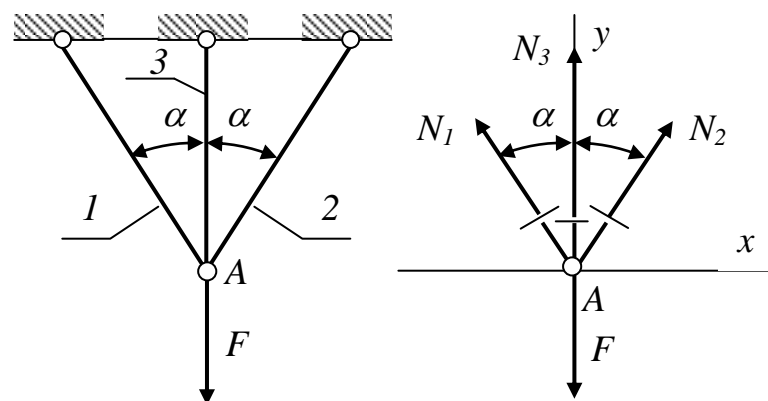
Чтобы закрепить груз F неподвижно в плоскости чертежа, очевидно, достаточно двух стержней 1 и 2. Вырезая узел A , получим систему сил, сходящихся в одной точке, для которой,

как известно, можно составить два независимых уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha = F, \end{aligned}$$

решая которые совместно, получим: $N_1 = N_2 = F / (2 \cos \alpha)$.

Особенностью статически определимых конструкций является то, что при разрушении одного элемента вся конструкция теряет несущую способность.

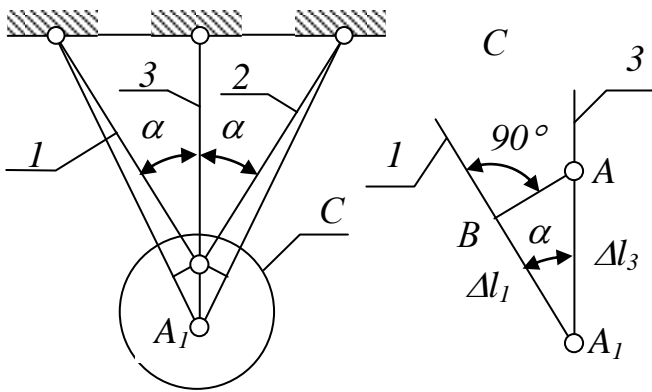


Для увеличения резерва прочности конструкции введем в нее дополнительный стержень 3. Теперь в двух уравнениях статического равновесия (*)

$$\begin{aligned} \sum X &= -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0; \\ \sum Y &= N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 = F \end{aligned}$$

будут содержаться три неизвестных. Так как число

неизвестных больше, чем уравнений, возникает необходимость составить дополнительное уравнение. Рассмотрим деформацию конструкции под действием нагрузки.



Считая реальные деформации малыми, можно не учитывать изменение угла α между стержнями. Тогда из прямоугольного треугольника AA_1B следует:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha, \quad (**)$$

где Δl_1 и Δl_2 – абсолютные удлинения стержней.

Уравнение (**), связывающее деформации стержней 1 и 2,

называется *уравнением совместности деформаций*.

Удлинения стержней при их растяжении и сжатии могут быть выражены через продольные силы по закону Гука (28) $\Delta l = \frac{Nl}{AE}$.

Подставив в уравнение совместности деформаций (**) выражения $\Delta l_1 = N_1 l_1 / (AE)$ и $\Delta l_3 = N_3 l_3 / (AE)$, с учетом, что $l_3 = l_1 \cos \alpha$, получим

$$N_1 = N_3 \cos^2 \alpha. \quad (***)$$

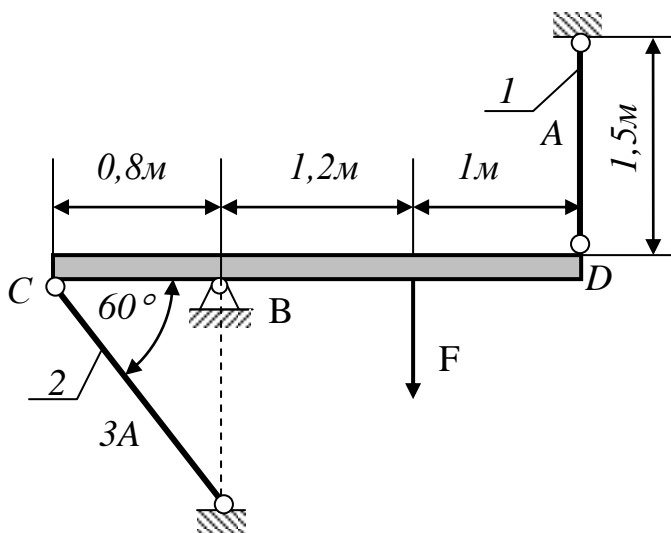
Таким образом, из схемы деформации конструкции получили дополнительное уравнение (***), связывающее неизвестные продольные силы.

Теперь решаем совместно дополнительное уравнение (***) с уравнениями статики (*). Окончательно получим

$$N_3 = F / (1 + \cos^3 \alpha); \quad N_1 = N_2 = F \cos^2 \alpha / (1 + 2 \cos^3 \alpha).$$

Таков путь раскрытия статической неопределенности при помощи уравнений совместности деформаций.

Пример раскрытия статической неопределенности

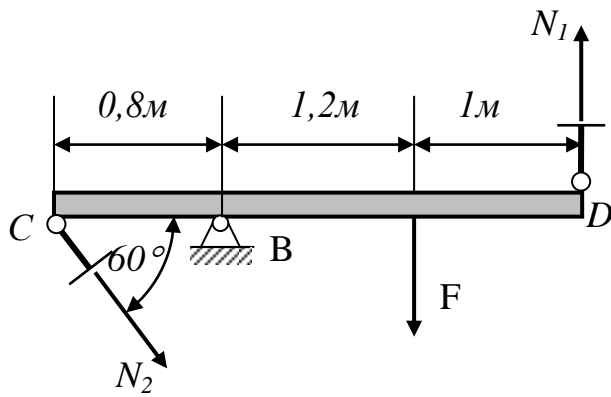


Абсолютно жесткий стержень CD опирается на неподвижный шарнир B и удерживается от поворота двумя стальными тягами разного поперечного сечения: $A = 100 \text{ мм}^2$ и $3A = 300 \text{ мм}^2$. Материал тяг – сталь $Ст3$. Определить несущую способность конструкции по допустимым напряжениям и по предельному состоянию. Значение коэффициента запаса прочности принять $n_T = 1,5$.

Решение

Несущая способность конструкции определяется прочностью тяг. Применяя метод сечений, попытаемся найти продольные силы в тягах.

Уравнение статического равновесия горизонтального стержня:



$$\Sigma m_B = N_2 \sin 60^\circ \cdot 0,8 - F \cdot 1,2 + N_1 \cdot 2,2 = 0$$

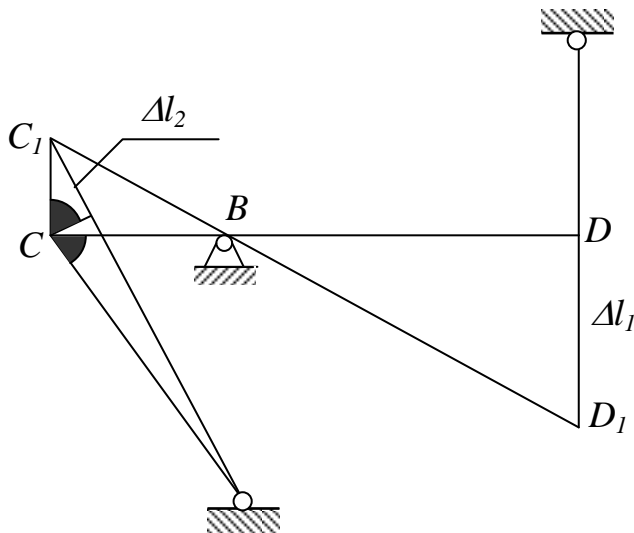
или

$$2,2N_1 + 0,693N_2 = 1,2F \quad (**)$$

Суммы проекций сил не используем, так как в них войдут еще две неизвестные реакции в шарнире *B*.

В полученном уравнении равновесия две неизвестные: сила *F* и продольная сила в наименее нагруженной тяге (продольная сила в наиболее нагруженной тяге практически известна, так как напряжения в ней равны значению допускаемых напряжений). Следовательно, конструкция один раз статически неопределима.

Составляем уравнение совместности деформаций. Считая деформации малыми, можно принять, что точки *C* и *D* перемещаются вертикально. Тогда



из подобия треугольников BCC_1 и BDD_1 следует пропорция $BC/BD = CC_1/DD_1$.

Но так как $CC_1 = \Delta l_2 / \sin 60^\circ$ и $DD_1 = \Delta l_1$, получаем

$$0,8/2,1 = \Delta l_2 / (\sin 60^\circ \Delta l_1) \text{ или}$$

$$\Delta l_1 = 3,031 \Delta l_2 \quad (**)$$

Удлинения тяг выражаем через продольные силы по закону Гука (28):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{1,5N_1}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2 \cos 60^\circ E3A} = \frac{0,533N_2}{EA}$$

Подставив полученные выражения в уравнение совместности деформаций (**), получим дополнительное уравнение, связывающее продольные силы.

$$N_1 = 1,077N_2 \quad (***)$$

Решив совместно (*) и (***), получим $N_2 = 0,406F$;

$$N_1 = 0,437F.$$

Расчет на прочность по допускаемым напряжениям

Находим напряжения в тягах:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,437F}{100 \cdot 10^{-6}} = 4374F; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,406F}{300 \cdot 10^{-6}} = 1353F,$$

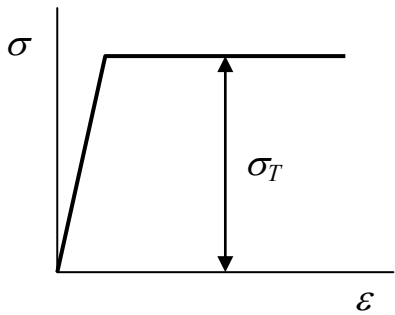
то есть максимальные напряжения возникают в тяге *I*. Из условия прочности этой тяги находим значение несущей способности конструкции:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 4374F \leq [\sigma]_p;$$

$$[F]=[\sigma]_p/4374=28,6 \cdot 10^3 \text{ Н}=28,6 \text{ кН.}$$

Расчет на прочность по предельному состоянию

В отличие от расчета по допускаемым напряжениям, метод расчета по предельному состоянию допускает возникновение в материале пластической деформации. Принимается, что материал при деформировании следует схематизированной диаграмме Прандтля.



При увеличении нагрузки на конструкцию достигнут предела текучести сначала напряжения в тяге 1, затем и в тяге 2: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T$. При этом полностью исчерпывается несущая способность тяг, наступает предельное состояние конструкции. Значения продольных сил в тягах $N_1 = \sigma_1 \cdot A = \sigma_T \cdot A$; $N_2 = \sigma_2 \cdot 3A = \sigma_T \cdot 3A$ подставим в уравнение

равновесия (*), откуда найдем значение силы F , вызывающее предельное состояние

$$F_{пред} = 3,483 \sigma_T \cdot A = 3,483 \cdot 210 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 73,13 \cdot 10^3 \text{ Н} = 73,13 \text{ кН.}$$

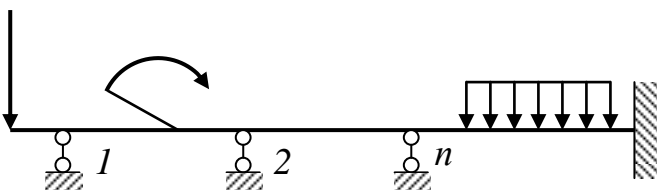
Допускаемое значение нагрузки найдем, поделив предельное значение на коэффициент запаса прочности

$$F_{дон} = F_{пред} / n_T = 73,13 / 1,5 = 48,76 \text{ кН}$$

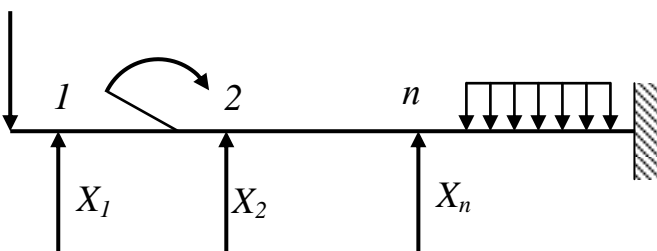
Полученное значение несущей способности в 1,7 раза превышает несущую способность, полученную по допускаемым напряжениям.

8.2. Канонические уравнения метода сил

Формализуем уравнения совместности деформаций. Пусть конструкция имеет n лишних связей, то есть является n раз статически неопределимой. Отбросим все лишние связи, заменив их системой обобщенных сил X_1, X_2, \dots, X_n , действующих в направлении отброшенных связей.



Обозначим перемещения точек приложения лишних связей в их направлении $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$. Очевидно, все они равны нулю, так как перемещения в направлении действия связей невозможны.



В соответствии с принципом независимости действия сил любое перемещение Δ_i можно представить в виде двух слагаемых: перемещения от действия заданной нагрузки Δ_{iP} и перемещения от действия всех реакций отброшенных связей $\Delta_{iX} = \Delta_{iX_1} + \Delta_{iX_2} + \dots + \Delta_{iX_n}$, где Δ_{iX_j} – перемещение

в направлении i -ой связи от действия реакции связи X_j . Вполне очевидно, что величина перемещения Δ_{iX_j} прямо пропорциональна значению вызывающей

его силы X_j , то есть $\Delta_{iX_j} = k_{ij} \cdot X_j$. Для выяснения физического смысла коэффициента пропорциональности k_{ij} приравняем значение силы X_j к единице. Тогда коэффициент пропорциональности – есть значение перемещения от действия единичной силы (единичное перемещение δ_{ij}) $k_{ij} = \delta_{ij}$ и $\Delta_{iX_j} = \delta_{ij} \cdot X_j$. В итоге получаем систему уравнений (94) для определения неизвестных лишних связей.

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \right. , \quad (94)$$

канонические уравнения метода сил

Эти уравнения (94) называются **каноническими уравнениями метода сил**. В канонических уравнениях X_i – неизвестная обобщенная сила, δ_{ij} – перемещение точки i в направлении действия

обобщенной силы X_i от действия единичной силы $X_j = 1$ (единичные коэффициенты канонических уравнений), Δ_{iP} – перемещение точки i в направлении действия обобщенной силы X_i от действия всех заданных обобщенных сил (грузовые коэффициенты канонических уравнений).

Для вычисления коэффициентов канонических уравнений как перемещений используется интегралы Мора и способ Верещагина.

Например, при расчете статически неопределимых балок и рам строят необходимые для вычисления коэффициентов эпюры изгибающих моментов в основной системе:

- грузовую эпюру M_P – основную систему загружают только внешними силами;
- единичные эпюры по числу неизвестных: $\overline{M}_1; \overline{M}_2; \dots, \overline{M}_n$ – основную систему загружают поочередно единичными силами $X_1=1; X_2=1; \dots; X_n=1$.

Вычисляют коэффициенты канонических уравнений:

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{M_P \overline{M}_i dz}{EI_x}; \quad (95)$$

грузовые коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_i dz}{EI_x}; \quad (96)$$

главные единичные коэффициенты канонических уравнений

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum \int \frac{\overline{M}_i \overline{M}_j dz}{EI_x} = \sum \int \frac{\overline{M}_j \overline{M}_i dz}{EI_x}. \quad (97)$$

единичные коэффициенты канонических уравнений

грузовые коэффициенты получают путем перемножения грузовой эпюры на соответствующую

единичную эпюру (95); главные единичные коэффициенты (с одинаковыми индексами) получают перемножением соответствующей единичной эпю-

ры саму на себя (96); единичные коэффициенты с разными индексами определяют перемножением соответствующих единичных эпюр (97).

Найденные значения коэффициентов подставляют в канонические уравнения. Решение системы канонических уравнений даст значения лишних неизвестных X_i .

Строится окончательная (истинная) эпюра моментов M_x . Для этого основная система загружается внешней нагрузкой и найденными лишними неизвестными.

Для проверки вычислений строится суммарная единичная эпюра \overline{M}_Σ .

$$\sum \int \frac{M_x \overline{M}_\Sigma}{EI_x} dz = 0 \quad (98)$$

кинематическая проверка
вычислений

Для ее построения основную систему загружают одновременно всеми единичными силами $X_1=1; X_2=1; \dots; X_n=1$. Кинематическая проверка решения заключается в том, что при правильном решении перемещения по направлению всех

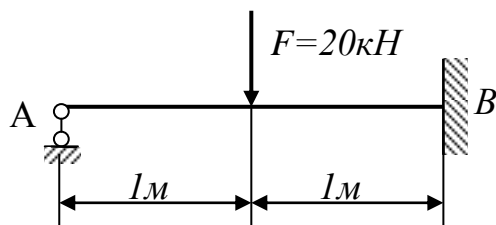
отброшенных связей должны отсутствовать, то есть результат от перемножения окончательной эпюры моментов M_x на суммарную единичную \overline{M}_Σ должен равняться нулю (98).

Дальнейший расчет балки или рамы на прочность или жесткость производится по окончательной эпюре изгибающих моментов M_x .

Построение всех эпюр производится в так называемой **основной системе**. Основная система – это статически определимая конструкция, полученная из статически неопределимой путем удаления всех лишних связей. Но так как любую связь можно считать лишней, то вариантов основной системы, как правило, несколько. Принимается вариант, обеспечивающий простоту дальнейших вычислений. При этом должно выполняться основное правило: основная система должна быть геометрически неизменяемой.

Пример расчета статически неопределимой балки

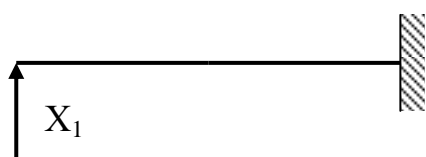
Для заданной схемы балки определить необходимый номер стандартного двутавра. Материал балки – сталь Ст3.

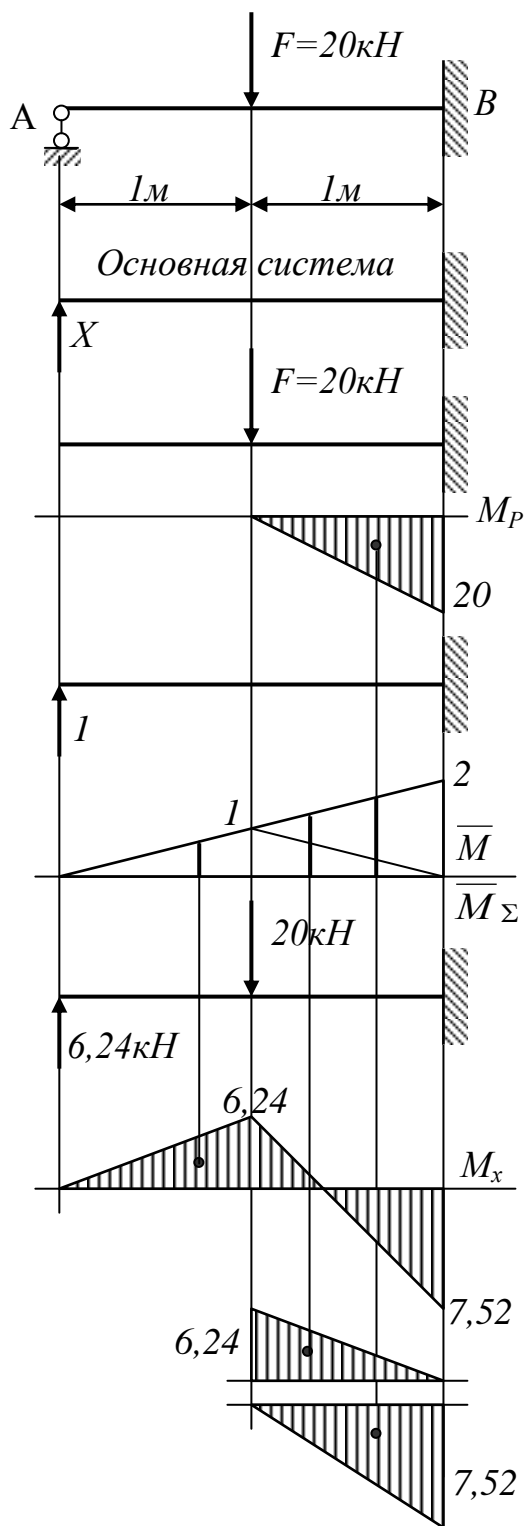


Решение

Проводим анализ статической неопределимости: балка имеет 4 связи, уравнений равновесия 3, балка один раз статически неопределима. В качестве основной системы принимаем консоль, обеспечивающую простоту построения эпюр. Реакцию в отброшенной опоре обозначаем X .

Решение





Записываем каноническое уравнение метода сил для один раз статически неопределимой конструкции.

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0 \quad (*)$$

Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p , для чего основную систему загружаем внешней силой F .

Строим единичную эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 , приложив к основной системе силу $X_1=1$. Полученная эпюра является и суммарной единичной эпюрой \bar{M}_Σ , так как неизвестно только одно.

Вычисляем коэффициенты канонического уравнения.

Грузовой коэффициент (95)

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_p \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left(- \left\{ \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right] \right) = - \frac{16,67}{EI_x}$$

Единичный коэффициент (96)

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left(+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 2 \right] \right) = + \frac{2,67}{EI_x}$$

Полученные значения коэффициентов подставляем в каноническое уравнение метода сил (*), откуда

$$X_1 = 6,24 \text{ кН.}$$

Строим окончательную (истинную)

эпюру изгибающих моментов M_x в эквивалентной системе. Для этого к основной системе прикладываем все внешние силы и определенную методом сил реакцию X_1 .

Для проверки вычислений разбиваем окончательную эпюру моментов на простые геометрические фигуры и перемножаем с суммарной единичной эпюрой.

$$\sum \int M_x \bar{M}_\Sigma dz =$$

$$\left(+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot 6,24 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 6,24 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right] - \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7,52 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right] \right) = +6,24 - 6,27 = 0,03.$$

Ошибка вычислений составляет:

$$\Delta = (0,03/6,24) \cdot 100\% = 0,5\%.$$

На этом раскрытие статической неопределимости балки закончено.

С окончательной эпюры берем максимальное значение изгибающего момента $|M_x|_{\max} = 7,52 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и из условия прочности на изгиб по нормальным напряжениям находим необходимый момент сопротивления двутавра:

$$W_x \geq |M_x|_{\max} / [\sigma]_{\text{изг}} = 7,52 \cdot 10^3 / (150 \cdot 10^6) \cdot 10^6 = 50,1 \text{ см}^3.$$

Этому значению соответствует двутавр №12, у которого $W_x = 58,4 \text{ см}^3$.

Особенности расчета статически неопределимых рам

Рамами называют несущие конструкции, состоящие из нескольких стержней, жестко соединенных в узлах. Стержни могут соединяться в замкнутые контуры. В стержнях, образующих замкнутый контур, определить внутренние силовые факторы методом сечений не предоставляется возможным без дополнительных расчетов. Поэтому рамы, имеющие замкнутые контуры, являются внутренне статически неопределимыми.

Рамы различают плоские (сама рама и нагрузка располагаются в одной плоскости), плоско-пространственные (рама плоская, нагрузка действует перпендикулярно плоскости рамы) и пространственные.

Стержни плоской рамы испытывают изгиб (M_x), сдвиг (Q) и растяжение-сжатие (N). Поэтому жесткий замкнутый контур плоской рамы трижды статически неопределим. Введение в замкнутый контур одного шарнира ликвидирует одну связь. Следовательно, чтобы замкнутый жесткий контур сделать статически определимым, нужно врезать в него три шарнира или разрезать один из стержней контура.

Степень статической неопределимости плоской рамы можно определить по формуле $CH = (BC - 3) + \Sigma(3 - III)$,

где CH – степень статической неопределимости рамы;

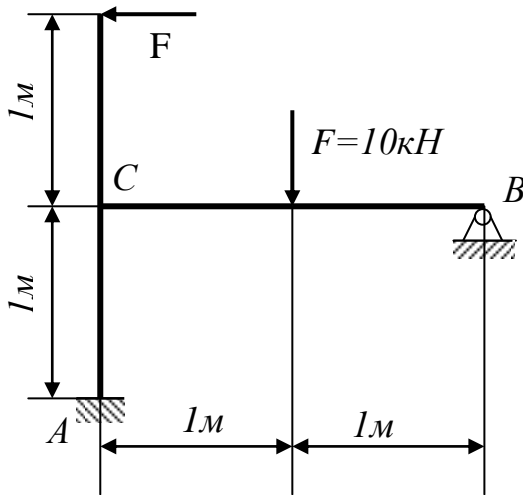
BC – число внешних связей (опорных реакций);

III – число шарниров в каждом замкнутом контуре.

Суммирование производится по всем замкнутым контурам. Первое слагаемое показывает степень внешней неопределимости, второе – степень внутренней неопределимости.

В плоскопространственной раме стержни работают на изгиб (M_x), сдвиг (Q) и кручение (T_k). В стержнях пространственной рамы присутствуют все шесть внутренних силовых факторов ($N, Q_x, Q_y, T_k, M_x, M_y$).

Пример расчета статически неопределимой плоской рамы



Для заданной схемы рамы найти необходимые размеры стандартной квадратной трубы. Жесткость рамы на всех участках одинаковая. Материал – сталь Ст2.

Решение

Проводим анализ статической неопределимости рамы: рама плоская, имеет 5 внешних связей, замкнутые контуры отсутствуют. Следовательно, рама дважды статически неопределима, неопределимость внешняя. Для получения

основной системы отбросим опору B , заменив ее двумя реакциями X_1 и X_2 .

Записываем канонические уравнения метода сил для дважды статически неопределимой конструкции:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Строим грузовую эпюру моментов, приложив к основной системе внешнюю нагрузку. Ординаты графика откладываем на сжатом волокне стержней.

Строим единичные эпюры моментов, поочередно прикладывая к основной системе единичные силы $X_1=1$; $X_2=1$.

Вычисляем коэффициенты канонических уравнений, перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина.

Грузовые коэффициенты:

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(- \left\{ \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right] + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \right\} [2] \right) = + \frac{1,667}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{M_P \bar{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \left(- \left\{ \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] \right) = - \frac{3,333}{EI}.$$

Единичные коэффициенты:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI} \left(+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 2 \right] + \{ 2 \cdot 1 \} [2] \right) = + \frac{4,667}{EI};$$

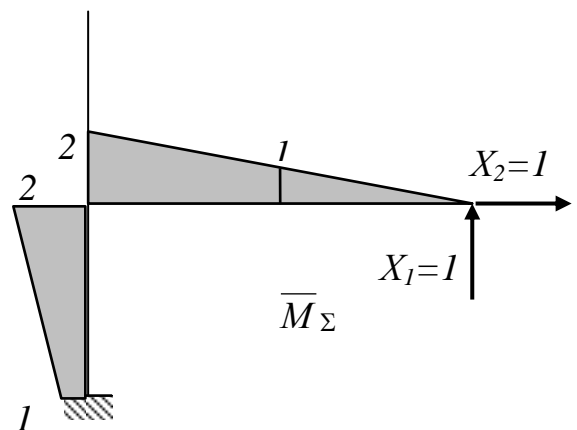
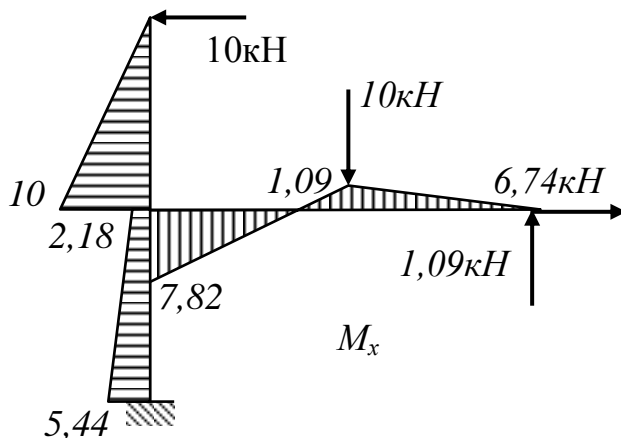
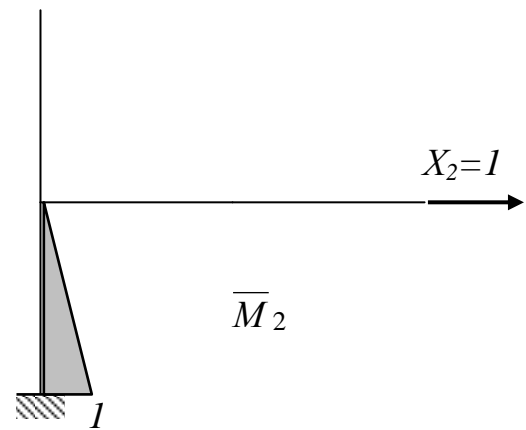
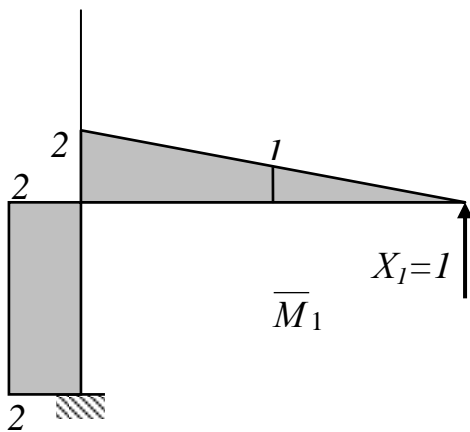
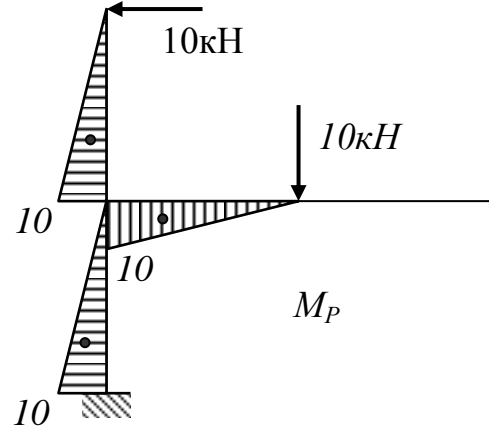
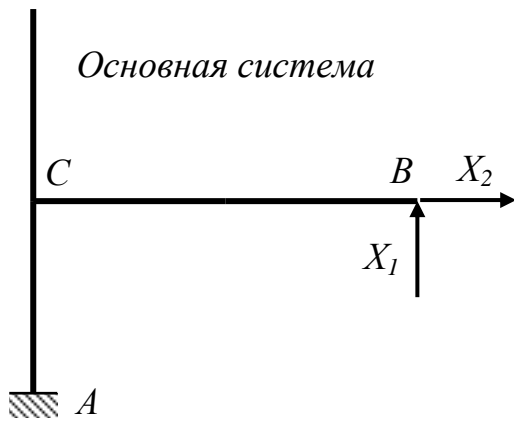
$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_x} dz = \frac{1}{EI} \left(+ \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] \right) = + \frac{0,333}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI} \left(- \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right\} [2] \right) = - \frac{1}{EI}.$$

Подставив значения коэффициентов в канонические уравнения и сократив на жесткость, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 4,667X_1 - 1,000X_2 = -1,667; \\ 1,000X_1 + 0,333X_2 = +3,333. \end{cases}$$

Решение системы дает значения неизвестных $X_1 = +1,09 \text{ кН}$; $X_2 = +6,74 \text{ кН}$.



Прикладываем к основной системе внешние силы и вычисленные реакции связей и строим окончательную эпюру изгибающих моментов.

Делаем кинематическую проверку вычислений, перемножая окончательную эпюру моментов с суммарной единичной эпюрой:

$$\sum \int M_x \bar{M}_\Sigma dz = + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1,09 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 \right] + \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1,09 \cdot 1 \right\} \left[\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 \right] -$$

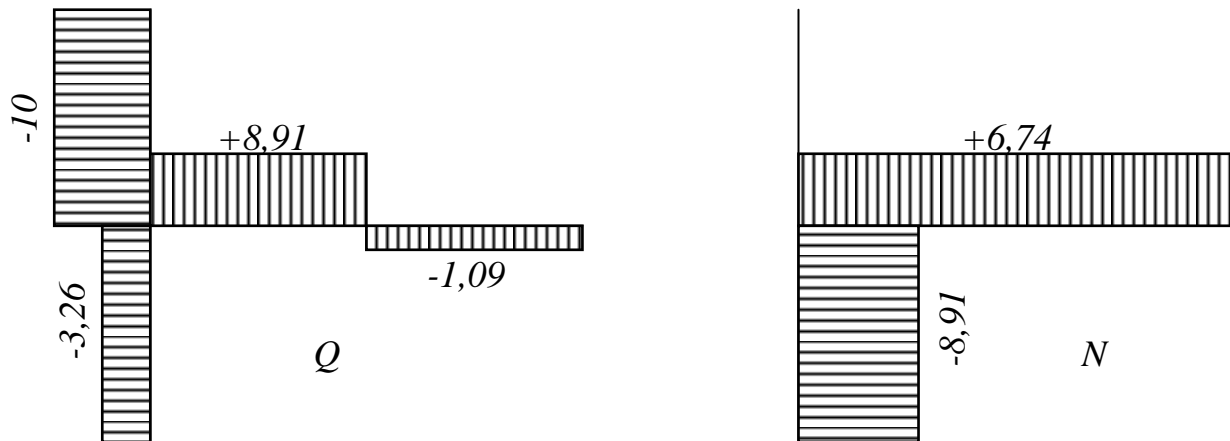
$$-\left\{\frac{1}{2} \cdot 7,82 \cdot 1\right\}\left[\frac{2}{3} \cdot 2+\frac{1}{3} \cdot 1\right]+\left\{\frac{1}{2} \cdot 2,18 \cdot 1\right\}\left[\frac{2}{3} \cdot 2+\frac{1}{3} \cdot 1\right]+\left\{\frac{1}{2} \cdot 5,44 \cdot 1\right\}\left[\frac{1}{3} \cdot 2+\frac{2}{3} \cdot 1\right]=$$

$$=6,53-6,52=0,01.$$

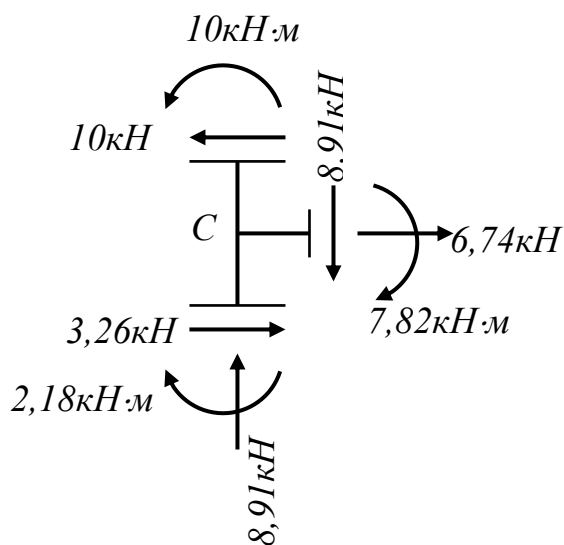
Погрешность вычислений составляет:

$$\Delta=(0,01/6,52) \cdot 100 \%=0,2 \%$$

Строим эпюры поперечных (Q) и продольных (N) сил.



Правильность построения эпюр проверяем по равновесию узла C . Вырезаем узел, проводя поперечные сечения в трех, примыкающих к узлу стержнях. Значения внутренних силовых факторов в сечениях берем с соответствующих эпюр. Направления внутренних силовых факторов ставим в соответствии с их знаками и принятыми ранее правилами.



Составляем уравнения равновесия узла:

$$\Sigma X=-10+3,26+6,74=0;$$

$$\Sigma Y=+8,91-8,91=0;$$

$$\Sigma m_C=+10-2,18-7,82=0.$$

Узел C находится в равновесии.

Расчет на прочность проводим по максимальному изгибающему моменту. Из условия прочности при изгибе находим значение момента сопротивления сечения:

$W_x \geq |M_x|_{\max} / [\sigma]_{\text{изг}} = [(10 \cdot 10^3) / (150 \cdot 10^6)] \cdot 10^6 = 66,7 \text{ см}^3$. По таблице сортамента квадратных труб принимаем трубу с размерами сечения $100 \times 100 \times 7 \text{ мм}$, имеющую момент сопротивления $W_x = 75,5 \text{ см}^3$, площадь сечения $A = 25,45 \text{ см}^2$, момент инерции $I_x = 377,5 \text{ см}^4$.

Проверим сжатый участок рамы на прочность по формуле (80) с учетом его изгиба моментом $M_x = 5,44 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и сжатия продольной силой $N = 8,91 \text{ кН}$.

Значение критической силы по формуле Эйлера для этого участка

$$N_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 377,5 \cdot 10^{-8}}{1^2} = 7444 \cdot 10^3 \text{ Н} = 7444 \text{ кН}.$$

Значение максимальных напряжений по формуле (80)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_{\min} \left(1 - \frac{N}{N_{\text{Э}}} \right)} = \frac{8,91 \cdot 10^3}{25,45 \cdot 10^{-4}} + \frac{5,44 \cdot 10^3}{75,5 \cdot 10^{-6} \left(1 - \frac{8,91}{7444} \right)} = 75,6 \text{ МПа},$$

что меньше значения допускаемого напряжения.

Тема 9. ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА

Нагруженность детали при ее движении или при действии на деталь изменяющейся во времени нагрузки, во-первых, приводит к возникновению сил инерции, которые являются причиной появления в материале детали дополнительных напряжений; во-вторых, действие переменных напряжений вызывает особый вид разрушения – усталость материала. Расчет деталей с учетом этих факторов называется динамическим расчетом.

9.1. Учет сил инерции

Действие сил инерции на конструкцию учитывают в соответствии с принципом Даламбера, согласно которому движущееся тело или систему тел можно рассматривать в состоянии мгновенного равновесия, если приложить все внешние силы и силы инерции. Силы инерции определяются по известным формулам теоретической механики. Дальнейший расчет на прочность не отличается от рассмотренных ранее статических задач.

Примеры учета сил инерции

Пример 1. Лебедка поднимает груз массой m . В начале подъема груз движется ускоренно с ускорением a . Определить максимальное значение напряжений, возникающих в тросе лебедки.

Решение

На груз действует сила веса $G=mg$ и в начале подъема сила инерции $F_{ин}=ma$. Используя метод сечений, получаем значение продольной силы в тросе в начале подъема:

$$N_{дин} = G + F_{ин} = mg + ma = mg(1 + a/g) = G \cdot k_D,$$

где введено обозначение:

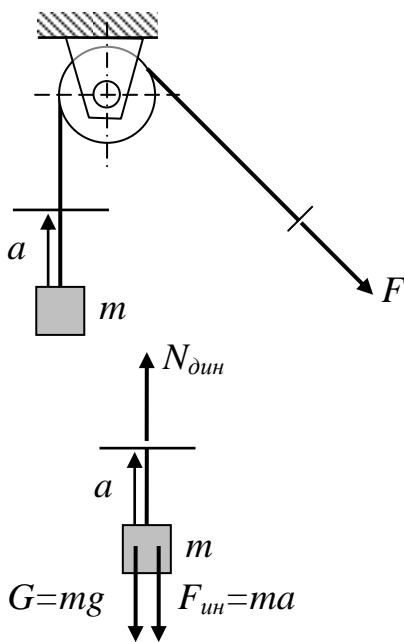
$k_D = 1 + a/g$ – **динамический коэффициент**, показывающий, во сколько раз возрастает значение продольной силы по сравнению со

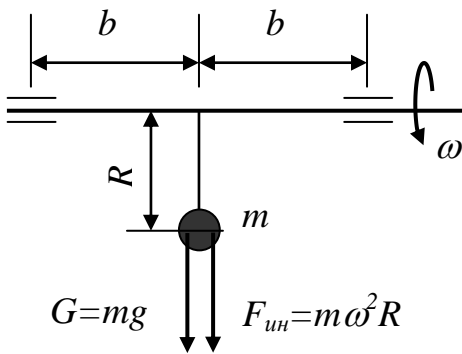
статическим действием силы веса груза.

Тогда максимальное значение напряжений:

$$\sigma_{дин} = N_{дин}/A = G \cdot k_D/A = \sigma_{ст} \cdot k_D,$$

где $\sigma_{ст} = G/A$ – значение напряжений при статическом действии груза.





Пример 2. Вал жестко связан с неуравновешенным грузом массой m , расположенным на расстоянии R от оси вала. Определить величину максимальных нормальных напряжений при равномерном вращении вала с угловой скоростью ω .

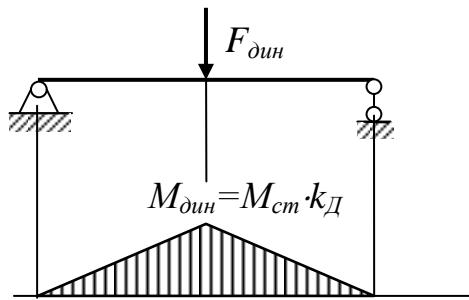
Решение

При вращении вала с грузом на вал будут действовать две силы: сила веса груза $G=mg$, направленная вертикально вниз, и центробежная сила инерции $F_{ин}=m\omega^2R$, направленная по радиусу от оси вала. Наиболее опасным для вала будет нижнее положение груза, при котором обе силы имеют одно направление и значение их равнодействующей максимально:

$$F_{дин} = G + F_{ин} = mg + m\omega^2R = G(1 + \omega^2R/g) = G \cdot k_D.$$

Значение динамического коэффициента в данном случае:

$$k_D = 1 + \omega^2R/g.$$



Значение напряжений с учетом действия центробежной силы инерции

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot k_D,$$

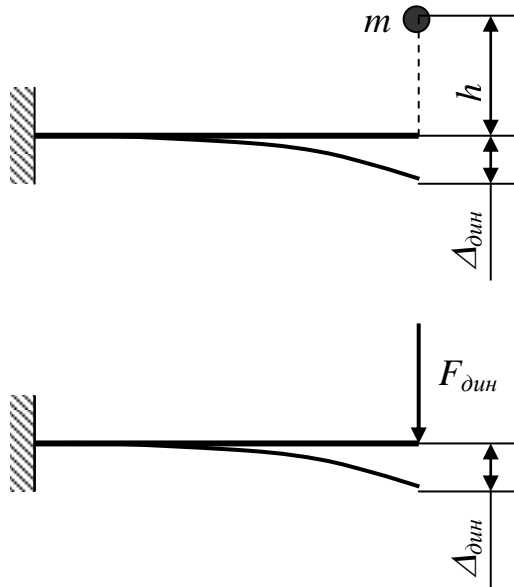
где $\sigma_{ст}$ – значение напряжений от статического приложения силы веса груза.

9.2. Ударная нагрузка

Особым видом динамического нагружения является удар. При ударе в короткий промежуток времени развиваются значительные ударные силы, которые приводят к резкому росту напряжений и деформаций. Рост напряжений и деформаций при ударе определяют при помощи динамического коэффициента k_D , который показывает, во сколько раз возрастут напряжения и деформации при ударе по сравнению со статическим приложением той же нагрузки, то есть:

$k_D = F_{дин}/F_{ст} = \sigma_{дин}/\sigma_{ст} = \Delta_{дин}/\Delta_{ст} > 1$, где $\sigma_{ст}; \Delta_{ст}$ – соответственно напряжения и деформации при статическом приложении нагрузки $F_{ст}$; $\sigma_{дин}; \Delta_{дин}$ – соответственно напряжения и деформации при ударе.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар при падении груза массой m на балку с высоты h . Величина потенциальной энергии удара в конце деформации балки $\Pi = mg(h + \Delta_{дин}) = F_{ст}(h + \Delta_{ст} \cdot k_D)$. Очевидно, что такую же деформацию, как при ударе, следовательно, и напряжения даст статическое приложение силы $F_{дин}$. Величина потенциальной энергии упругой деформации в этом случае:



$$\Pi = (1/2)F_{дин} \cdot \Delta_{дин} - (1/2)F_{ст} \Delta_{ст} \cdot k_D^2$$

Приравняв выражения потенциальной энергии, получим квадратное уравнение

$$k_D^2 + 2k_D - 2h/\Delta_{ст} = 0.$$

Наибольшее значение корня данного уравнения дает значение динамического коэффициента (99а). В том случае, когда к моменту удара известна скорость движения груза v , получаем выражение (99б).

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta_{ст}}} \quad (99)$$

динамический коэффициент при ударе без учета массы конструкции

Формула (99) дает завышенное значение динамического коэффициента, так как не учитывает массу самой конструкции.

При приближенном расчете собственную массу конструкции M можно заменить некоторой массой $M_{прив}$, приведенной к точке удара. Величина приведенной массы должна обладать такой же кинетической энергией, что и сама конструкция. Определяют по формуле $M_{прив} = \alpha \cdot M$, где α – коэффициент приведения массы к точке удара. Значения коэффициента приведения массы берут из справочных таблиц.

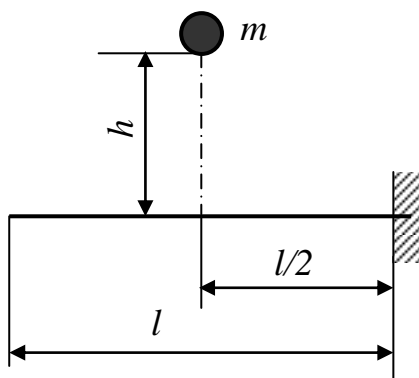
Значение динамического коэффициента определяют по формуле (100)

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta_{ст} \cdot (1 + M_{прив} / m)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \Delta_{ст} \cdot (1 + M_{прив} / m)}} \quad (100)$$

динамический коэффициент с учетом массы конструкции

Пример определения напряжений при ударе

На консольную балку длиной $l=2$ м в середине пролета падает груз массой $m=10$ кг с высоты $h=0,5$ м. Сечение балки – двутавр №10, материал – сталь Ст3. Определить максимальные напряжения, возникающие в балке при ударе.



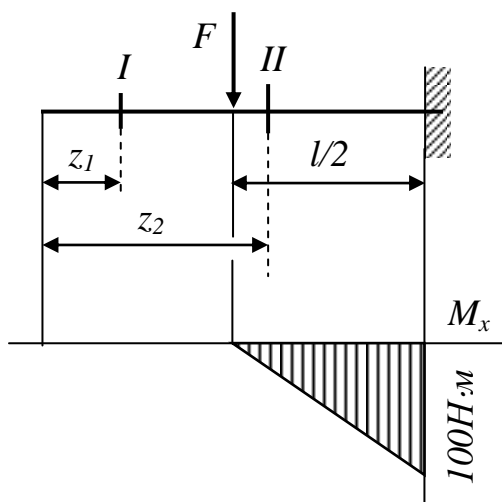
Решение

Строим эпюру изгибающего момента M_x от статического приложения веса груза $F = m \cdot g \approx 10 \cdot 10 = 100$ Н. Максимальные напряжения,

возникающие при этом:

$$\sigma_{ст} = |M_x|_{max} / W_x = 100 / (39,7 \cdot 10^{-6}) = 2,52 \text{ МПа},$$

где $W_x = 39,7 \text{ см}^3$ – момент сопротивления двутавра №10.



Прогиб в точке приложения силы

$$y_{cm} = F \cdot (0,5l)^3 / (3 \cdot EI_x) = (100 \cdot 1) / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 198 \cdot 10^{-8}) = 8,42 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

То есть при статическом расположении на балке массы 10 кг напряжения и деформации пренебрежительно малы.

Сначала определим напряжения в балке при ударе без учета массы самой балки. Динамический коэффициент по формуле (99)

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{y_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{8,42 \cdot 10^{-5}}} = 110.$$

Тогда напряжения при ударе

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ст} \cdot k_D = 2,52 \cdot 110 = 277,2 \text{ МПа}$$

превысят не только допустимое значение для этой стали, но и значение предела текучести $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$. Следовательно, можно ожидать пластической деформации балки (возникновения остаточного изгиба).

Проведем расчет с учетом массы балки. Масса самой балки:

$$M_B = m_B \cdot l = 9,46 \cdot 2 = 18,92 \text{ кг,}$$

где $m_B = 9,46 \text{ кг}$ – масса 1 м двутавра №10 (из таблиц сортамента проката).

Коэффициент приведения массы балки к точке удара определяем по формуле

$$\alpha = \frac{105 - 105c + 35c^2 - 2c^3}{140c^2} = 1,74,$$

где $c = 0,5$ для заданной схемы.

Приведенная масса

$$M_{прив} = \alpha \cdot M_B = 1,74 \cdot 18,92 = 32,97 \text{ кг.}$$

Значение динамического коэффициента по формуле (100)

$$k_{\ddot{A}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{y_{н\dot{o}} \cdot (1 + \dot{I}_{\dot{o}\dot{\delta}\dot{\alpha}} / m)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{8,42 \cdot 10^{-5} \cdot (1 + 32,97 / 10)}} = 54$$

Тогда напряжения при ударе $\sigma_{дин} = 2,52 \cdot 54 = 135 \text{ МПа}$, конечно, возрастают, но оказываются все же меньше допустимого значения $[\sigma]_{изг} = 150 \text{ МПа}$.

Таким образом, учет собственной массы конструкции существенно повлиял на результаты расчета и на прогнозируемые последствия удара.

9.3. Вынужденные колебания конструкций

Динамический расчет колебательных систем под действием периодически меняющейся возмущающей нагрузки сводится к решению двух задач.

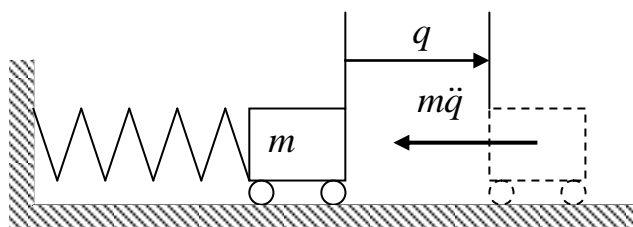
Задача 1. Определение частот собственных колебаний системы и контроль над тем, чтобы собственная частота колебаний не совпадала с частотой вынужденных колебаний.

Практикой установлено: для предотвращения резонанса упругой системы нужно, чтобы частоты собственных и вынужденных колебаний отличались друг от друга на 20÷30%.

Задача 2. Определение амплитуд (деформаций) колебаний системы, а по ним напряжений в опасном сечении конструкции и контроль над тем, чтобы максимальное значение напряжений не превышало допускаемого значения.

При решении обеих задач необходимо использовать в максимальной степени выводы, полученные в курсе теоретической механики (теории колебаний).

Рассмотрим колебательную систему с одной степенью свободы, которую можно представить в виде невесомого упругого элемента и колеблющейся массы m .



Обозначим обобщенную координату перемещения массы при ее движении q . Запишем уравнение движения массы в каноническом виде:

$$q = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n,$$

где $X_1; X_2; \dots; X_n$ – силы, действующие на массу при ее движении; $\delta_{11}; \delta_{12}; \dots; \delta_{1n}$ – перемещения массы, вызванные единичными силами.

При свободных колебаниях на массу действует только одна сила инерции $X_1 = -m\ddot{q}$, где \ddot{q} – ускорение движения массы.

Тогда уравнение движения примет вид $q = -\delta_{11}m\ddot{q}$ или $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}} \quad (101)$$

круговая частота
собственных колебаний

$\omega_0^2 = 1/\delta_{11}m$ – квадрат круговой частоты собственных колебаний массы. Откуда определяем частоту собственных колебаний (101).

Пусть на массу действует возмущающая сила, меняющаяся по гармоническому закону $F = F_{max} \sin \omega t$, где ω – круговая частота возмущающей силы, F_{max} – максимальное значение возмущающей силы.

Тогда уравнение движения будет иметь вид $q = \delta_{11}(-m\ddot{q} + F_{max} \sin \omega t)$, или $\ddot{q} + \omega_0^2 q = (F_{max}/m) \sin \omega t$.

Полное решение полученного дифференциального уравнения складывается из решения однородного уравнения без правой части и частного решения уравнения с правой частью:

$$q = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_{max} \delta_{11}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \sin(\omega t + \psi).$$

Первое слагаемое представляет собой собственные колебания системы, которые с течением времени затухают (если учесть силы трения и сопротивление среды). Второе сла-

гаемое представляет собой вынужденные колебания с частотой возмущающей силы.

В выражении амплитуды вынужденных колебаний $A_{вын} = \frac{F_{max} \delta_{11}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \beta q_{ст}$ числи-

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (102)$$

коэффициент нарастания колебаний

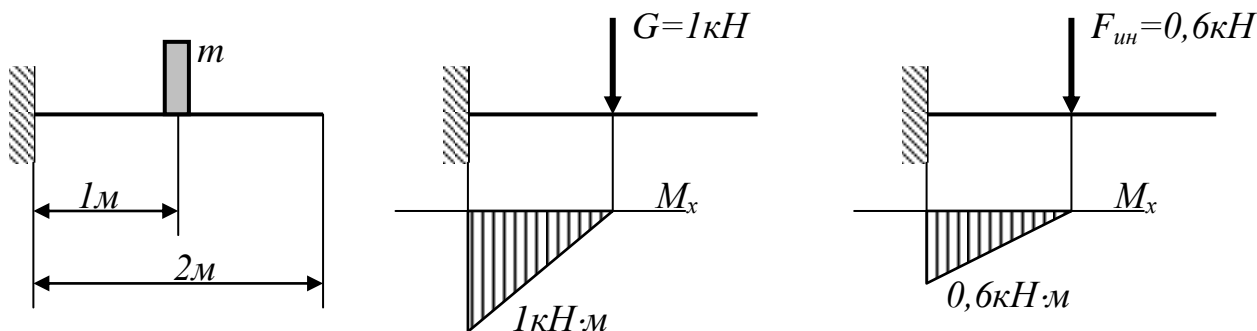
тель $F_{max} \delta_{11} = q_{ст}$ представляет собой перемещение массы от статического приложения силы F_{max} ; множитель (102) носит название *коэффициента нарастания колебаний*, который показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением возмущающей силы. Согласно закону Гука, во столько

же раз возрастут и напряжения при вынужденных колебаниях: $\sigma_{вын} = \beta \sigma_{ст}$.

В том случае, если на конструкцию действует кроме гармонической силы и постоянная нагрузка F , полные напряжения будут равны сумме напряжений от постоянной нагрузки и напряжений при вынужденных колебаниях: $\sigma_{max} = \sigma + \sigma_{вын} = \sigma + \beta \sigma_{ст}$, где σ – напряжения, вызванные постоянной нагрузкой; $\sigma_{ст}$ – напряжения от статического приложения максимального значения гармонической силы.

Пример определения напряжений при вынужденных колебаниях

На плоской раме, продольными элементами которой служат два двутавра №10 из стали Ст3, установлен механизм массой $m=100$ кг, имеющий ротор с частотой вращения $n=900$ оборотов в минуту. Центробежная сила инерции, возникающая при вращении ротора вследствие его неуравновешенности, равна $F_{ин} = 0,6$ кН. Определить величину наибольших нормальных напряжений в раме при ее вертикальной вибрации, пренебрегая собственным весом балки и силами сопротивления.



Решение

Определяем постоянную составляющую нагрузки (сила тяжести механизма):

$$G = m \cdot g \approx 100 \cdot 10 = 1000 \text{ Н} = 1 \text{ кН.}$$

Строим эпюру изгибающего момента в балке от действия силы тяжести механизма.

Максимальное значение постоянных напряжений в балке

$$\sigma = |M_x|_{max}/2W_x = 1000/(2 \cdot 39,7 \cdot 10^{-6}) = 12,6 \text{ МПа},$$

где $W_x = 39,7 \text{ см}^3$ – момент сопротивления двутавра №10.

Величина прогиба балки в точке крепления механизма от его силы тяжести

$$y_{cm} = G \cdot (l)^3 / (3 \cdot E \cdot 2I_x) = (1000)(1)^3 / (3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 198 \cdot 10^{-8}) = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

где $I_x = 198 \text{ см}^4$ – момент инерции двутавра №10.

Круговая частота собственных колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{y_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,42 \cdot 10^{-3}}} = 152,8 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота вынужденных колебаний

$$\omega = \pi n / 30 = \pi \cdot 900 / 30 = 94,2 \text{ с}^{-1}.$$

«Отстройка» от резонанса составляет

$$[(\omega_0 - \omega) / \omega_0] \cdot 100\% = [(152,8 - 94,2) / 152,8] \cdot 100\% = 38,4\%,$$

что соответствует существующим нормам (20÷30%), и частотной регулировки динамическая система не требует.

Коэффициент нарастания колебаний

$$\beta = 1 / [1 - (\omega / \omega_0)^2] = 1 / [1 - (94,2 / 152,8)^2] = 1,61.$$

Строим эпюру изгибающего момента от действия статически приложенной центробежной силы инерции $F_{cm} = F_{ин}$. Вычисляем максимальное значение напряжений от действия этой силы

$$\sigma_{cm} = |M_{cm}|_{max} / 2W_x = 600 / (2 \cdot 39,7 \cdot 10^{-6}) = 7,6 \text{ МПа},$$

Тогда наибольшее значение напряжений при вибрации будут достигать

$$\sigma_{max} = \sigma + \sigma_{вын} = \sigma + \beta \sigma_{cm} = 12,6 + 1,61 \cdot 7,6 = 24,8 \text{ МПа}.$$

Допускаемое напряжение для стали **Ст3** при симметричном цикле напряжений составляет 80 МПа, следовательно, рама обладает достаточной (даже избыточной) динамической прочностью при колебаниях.

9.4. Основы теории выносливости (усталостной прочности)

9.4.1. Явление усталости материала

Известно, чтобы отделить кусок проволоки (полосы), проще всего несколько раз согнуть ее в противоположных направлениях. При этом в материале возникают переменные напряжения растяжения–сжатия и разрушение происходит достаточно быстро. Подобный вид нагружения возникает во множестве деталей и конструкций при вынужденных колебаниях, вызванных переменной нагрузкой или их движением.

Разрушение материала при действии переменных во времени напряжений называется усталостью материала.

Причиной усталостного разрушения является возникновение и развитие усталостной трещины. Металлы представляют собой мелкокристаллический

конгломерат. Отдельные кристаллиты (зерна) имеют случайную ориентировку в пространстве и обладают анизотропией, то есть различными упругими и прочностными свойствами в разных направлениях. При деформировании напряжения в отдельных кристаллитах существенно отличаются одно от другого, а вычисляемые по формулам сопротивления материалов напряжения являются лишь их статическим осреднением. Поэтому в отдельных кристаллитах уже при малых нагрузках происходит пластическая деформация, на их поверхности появляются линии сдвига от действия касательных напряжений. По мере накопления циклов нагружения количество линий сдвига увеличивается, они расширяются и переходят на соседние зерна. В результате в материале образуется **микротрещина**, которая со временем увеличивается, и деталь, теряя несущую способность, разрушается. *Причиной возникновения микротрещины являются касательные напряжения, а нормальные напряжения либо ускоряют процесс разрушения (растягивающие напряжения), либо замедляют его (сжимающие напряжения).*

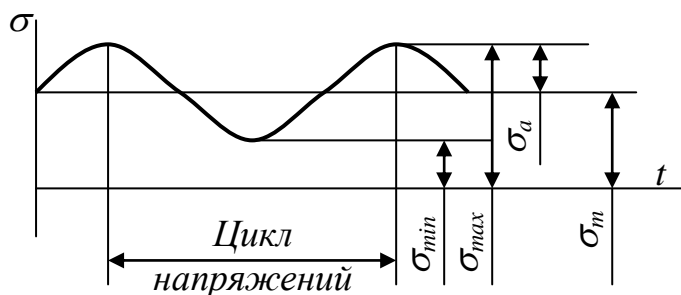
*Способность материала сопротивляться усталостному разрушению называется **выносливостью материала, или усталостной прочностью.***

9.4.2. Характеристики цикла напряжений

Характер изменения напряжений в разных деталях при их работе очень разнообразен: от простейшего гармонического до случайного.

Ограничимся рассмотрением случая циклического повторно-переменного нагружения.

Циклом напряжений называют однократную смену напряжений в течение периода. Характеристиками цикла являются:

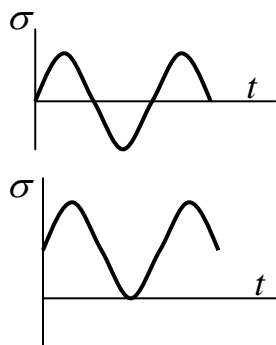


- σ_{min} – минимальное значение напряжений;
- σ_{max} – максимальное значение цикла;
- σ_m – среднее значение цикла;
- σ_a – амплитуда цикла;
- $r = \sigma_{min}/\sigma_{max}$ – коэффициент асимметрии цикла.

Значения коэффициента асимметрии меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Из всего многообразия выделим особо два цикла.

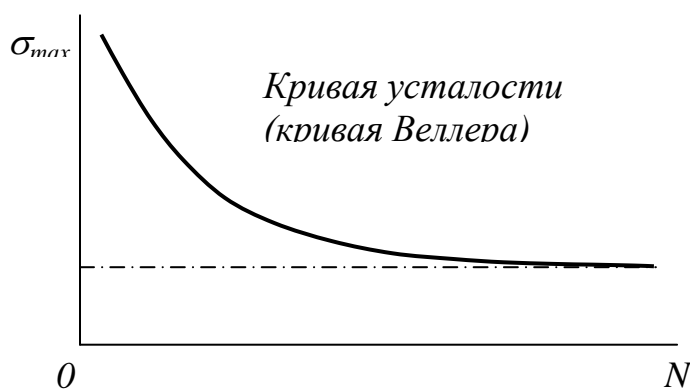
Цикл симметричный. Для этого цикла среднее значение $\sigma_m=0$, коэффициент асимметрии $r=-1$. Этот цикл напряжений является наиболее опасным для материала

Цикл пульсирующий (отнулевой). Для этого вида цикла минимальное значение $\sigma_{min}=0$; среднее значение равно амплитуде $\sigma_m=\sigma_a=\sigma_{max}/2$, коэффициент асимметрии $r=0$.



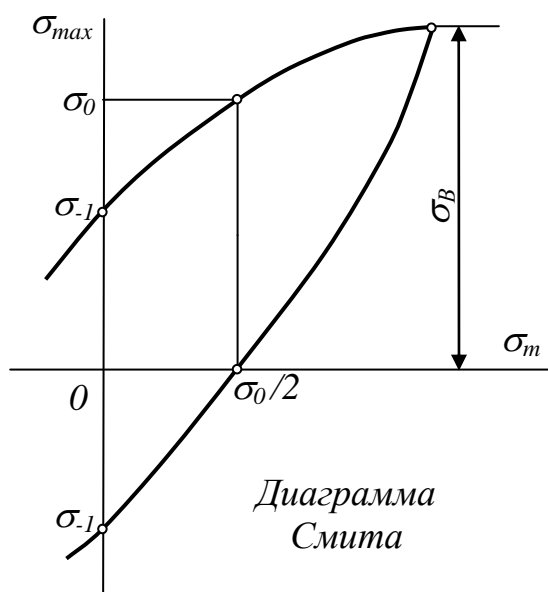
9.4.3. Экспериментальное исследование усталости материала

В расчете деталей на выносливость, как и при статической нагрузке, используют прочностные характеристики материала, полученные экспериментально. Испытания проводят на серии образцов. Образцы обычно гладкие цилиндрические диаметром 7–10 мм с полированной поверхностью. Отдельные серии образцов испытывают при одном значении коэффициента асимметрии цикла. Образцы одной серии испытывают при разных значениях максимального напряжения цикла. В образце создают циклически меняющиеся напряжения, считают число циклов N , потребовавшихся для его разрушения. По данным испытаний строят *диаграмму усталости* (*кривую Веллера*). Каждому образцу соответствует одна точка графика. По мере снижения напряжений образцы будут выдерживать все большее число циклов, а кривая

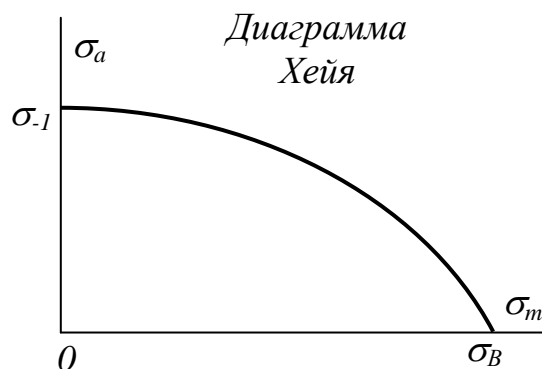


усталости будет приближаться к некоторой асимптоте, представляющую собой напряжение, при котором образец выдержит какое угодно число циклов. **Максимальное напряжение цикла, при котором материал выдерживает, не разрушаясь, любое число циклов,**

называется пределом выносливости материала. Обозначается предел выносливости символом напряжений с индексом, равным значению коэффициента асимметрии цикла. Например, предел выносливости при симметричном цикле – σ_{-1} , предел выносливости при пульсирующем цикле – σ_0 , предел выносливости при любом асимметричном цикле – σ_r .



Для характеристики сопротивляемости материала при различной асимметрии цикла строят диаграмму предельных напряжений или в осях $\sigma_{max}; \sigma_{min} - \sigma_m$ (диаграмма Смита), или в осях $\sigma_a - \sigma_m$ (диаграмма Хейя).



Эти диаграммы в аппроксимированном виде используются при выводе аналитических формул для расчета на выносливость.

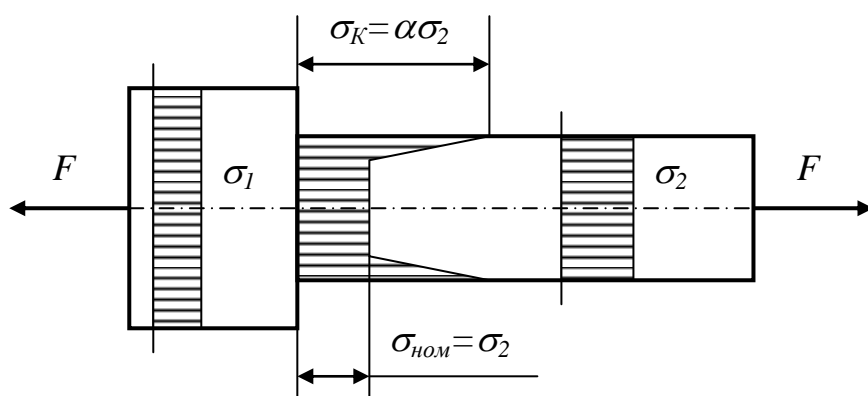
9.4.4. Влияние на предел выносливости детали конструктивно-технологических факторов

Значение предела выносливости детали существенно ниже табличного значения предела выносливости образца. Основными причинами снижения предела выносливости являются:

- наличие в деталях в отличие от гладкого образца резких изменений формы (отверстия, выточки, галтели и т.п.);
- отличие размеров сечения деталей от размеров сечения образца ($\varnothing 7-10$ мм);
- качество обработки поверхности детали, отличающееся от качества обработки поверхности испытываемых образцов (полирование).

Влияние на предел выносливости концентрации напряжений

Формулы сопротивления материалов для нахождения напряжений в сечении и законы их распределения



получены в предположении, что плоские сечения остаются плоскими и при деформации (гипотеза плоских сечений). Но в местах изменения формы детали сечения

искривляются (происходит *депланация* сечений). Определить напряжения в подобных местах можно только методами теории упругости и, как показывают исследования, здесь наблюдается резкий «всплеск» напряжений по сравнению с их осредненными значениями. Это явление называется **концентрацией напряжений**, а сама причина – **концентратором напряжений**. Чем резче изменение формы, тем больше степень концентрации напряжений. При статическом нагружении концентрация напряжений не оказывает существенного влияния на прочность и обычно не учитывается. При действии переменных напряжениях концентрация напряжений может явиться причиной

$\alpha = \frac{\sigma_{\dot{E}}^{\max}}{\sigma_{\dot{m}}} \quad (103)$ <p>теоретический коэффициент концентрации напряжений</p>
--

возникновения микротрещины и должна учитываться в расчетах. Степень концентрации напряжений характеризуется *теоретическим коэффициентом концентрации* α , который показывает, во сколько раз истинные напряжения σ_K в зоне концентрации превосходят номинальные значения напряжений, полученные методами

сопротивления материалов. Значения теоретического коэффициента концентрации приводятся в виде таблиц и графиков в справочниках конструктора. Но разные материалы по-разному реагируют на наличие концентрации напряжений. Поэтому влияние концентрации напряжений на предел выносливости детали оценивается **эффективным коэффициентом концентрации напряжений** (104), который показывает, во сколько раз предел выносливости гладкого образца превосходит предел выносливости детали с наличием концентратора напряжений.

$$\hat{E}_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(\sigma_{-1})_{\hat{E}}} \geq 1 \quad (104)$$

эффективный коэффициент концентрации напряжений

$$K_\sigma = 1 + q(\alpha - 1) \quad (105)$$

Практически величину эффективного коэффициента концентрации напряжений определяют через теоретический коэффициент концентрации по формуле (105), где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений. Для сталей $q = (0,4 \div 0,8)$, причем меньшие значения берутся для мягких (крупнозернистых) марок. Материалы с неоднородной структурой (например, чугун) нечувствительны к концентрации напряжений

($q=0$).

Таким образом, чтобы учесть наличие у детали концентратора напряжений, необходимо табличное значение предела выносливости поделить на эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Влияние на предел выносливости размеров детали

Эксперименты показывают, что при увеличении размеров детали предел выносливости снижается, при этом основное влияние оказывают размеры поперечного сечения и в меньшей степени длина детали. Основными причинами снижения предела выносливости являются три фактора.

Металлургический фактор – ухудшение качества металла отливки или поковки. Это связано с тем, что при увеличении размеров возрастает неоднородность металла, ухудшается степень уковки, затрудняется качественная термообработка и т.д.

Технологический фактор – с увеличением размеров уменьшается влияние термической и механической обработки. В деталях малых размеров упрочнению подвергается больший относительный объем материала.

Статистический фактор – увеличивается вероятность появления в материале опасных дефектов и перенапряженных зерен. С увеличением объема количество дефектов и опасно напряженных зерен возрастает, следовательно, увеличивается и вероятность разрушения.

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}} \leq 1 \quad (106)$$

масштабный коэффициент

Влияние размеров сечения детали на значение предела выносливости характеризуется **масштабным коэффициентом ε** (106), который равен отношению предела выносливости детали произвольных поперечных размеров к значению предела выносливости образца диаметром $7 \div 10$ мм.

Значения масштабного коэффициента можно найти в справочной литературе. Примеры приведены в таблице.

Масштабные коэффициенты

Материал	Диаметр сечения, мм						
	10	20	30	50	80	100	150
Углеродистая сталь без концентрации напряжений	1	0,96	0,90	0,82	0,73	0,70	0,60
Легированная сталь без концентрации и углеродистая сталь при умеренной концентрации	1	0,93	0,85	0,73	0,63	0,60	0,55
Легированная сталь при наличии концентрации напряжений	1	0,82	0,70	0,60	0,50	-	-
Сталь при большой концентрации напряжений	1	0,70	0,50	-	-	-	-

Следовательно, чтобы учесть размеры сечения детали, необходимо табличное значение предела выносливости образца умножить на масштабный коэффициент.

Влияние на предел выносливости качества обработки поверхности детали

Зарождение усталостной трещины начинается обычно с поверхности детали. Это связано с тем, что здесь действуют максимальные напряжения (изгиб, кручение) и на поверхности находятся концентраторы напряжений и

$$\beta_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})'}{\sigma_{-1}} \leq 1 \quad (107)$$

коэффициент качества обработки поверхности

дефекты обработки. Поэтому качество обработки поверхности оказывает существенное влияние на сопротивление усталости. Это влияние оценивается *коэффициентом качества обработки поверхности* β (107), равным отношению предела выносливости с данным

качеством обработки к пределу выносливости тщательно полированного образца.

Коэффициенты качества обработки поверхности

Состояние поверхности	Предел прочности стали, МПа		
	480	960	1400
Высококачественная полировка	1	1	1
Грубая полировка	0,95	0,93	0,90
Тонкая шлифовка или чистовое точение	0,93	0,90	0,88
Грубое точение или шлифовка	0,90	0,80	0,70
Окалина после проката	0,70	0,50	0,35
Коррозия в пресной воде	0,60	0,35	0,20
Коррозия в морской воде	0,40	0,23	0,13

Снижение предела выносливости тем больше, чем качественнее сталь. Так при грубом шлифовании предел прочности легированной стали оказывается таким же, как у углеродистой стали. Поэтому в случае использования высокопрочных легированных сталей детали должны иметь тщательно шлифованную, или полированную поверхность, иначе теряется смысл применения дорогих марок стали.

Чтобы учесть влияния качества обработки детали, необходимо табличное значение предела выносливости умножить на коэффициент качества обработки поверхности.

Технологические методы повышения сопротивления усталости

В настоящее время широко используются следующие технологические методы поверхностного упрочнения:

- наклеп роликами или дробью;
- поверхностная закалка с нагрева ТВЧ;
- химические способы упрочнения (цементация, азотирование, цианирование и др.).

Основными факторами повышения сопротивления усталости детали являются увеличение прочности поверхностного слоя; создание остаточных напряжений сжатия в поверхностном слое и, следовательно, перевод очага зарождения усталостной трещины в подслоиную область.

9.4.5. Основы расчета на выносливость при установившихся режимах переменных напряжений

Под установившимся режимом понимается периодический закон изменения напряжений с неизменными во времени амплитудой σ_a и средним значением σ_m цикла. Расчет на выносливость сводится к вычислению запаса усталостной прочности (выносливости) детали и его сравнению с допускаемым нормативным значением (поверочный расчет). Величину допускаемого нормативного коэффициента запаса выносливости следует принимать $[n]=2\div 3$.

Симметричный цикл нагружения. Простое напряженное состояние

Коэффициент запаса выносливости определяется отношением предела выносливости детали (с учетом конструктивно–технологических факторов) к амплитуде цикла:

- при действии нормальных напряжений
$$\dot{i} = \frac{(\sigma_{-1})_{\dot{A}}}{\sigma_{\dot{a}}};$$
- при действии касательных напряжений
$$\dot{i} = \frac{(\tau_{-1})_{\dot{A}}}{\tau_{\dot{a}}}.$$

Пределы выносливости детали по нормальным и касательным напряжениям с учетом конструктивно–технологических факторов определяют через табличные значения пределов выносливости образцов следующими выражениями:

$$(\sigma_{-1})_{\dot{A}} = \frac{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}}{\hat{E}_{\sigma}} \sigma_{-1} \text{ и } (\tau_{-1})_{\dot{A}} = \frac{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau}}{\hat{E}_{\tau}} \tau_{-1}$$

Тогда значения коэффициентов запаса выносливости определяются формулами (108).

$$n_{\sigma} = \frac{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma} \sigma_{-1}}{K_{\sigma} \sigma_a}; \quad n_{\tau} = \frac{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau} \tau_{-1}}{K_{\tau} \tau_a} \quad (108)$$

Симметричный цикл. Простое напряженное состояние

Симметричный цикл нагружения. Сложное напряженное состояние

При действии и нормальных и касательных напряжений необходимо использовать гипотезы прочности (91):

- по третьей гипотезе $(\sigma_{-1})_{\dot{A}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 4\tau_a^2}$;
- по четвертой гипотезе $(\sigma_{-1})_{\dot{A}} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3\tau_a^2}$.

Как показывают эксперименты коэффициент перед значением τ_a равен квадрату отношения пределов выносливости по нормальным и касательным напряжениям, то есть

$$(\sigma_{-1})_{\dot{A}} = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1})_{\dot{A}}}{(\tau_{-1})_{\dot{A}}} \right]^2 \tau_a^2}, \text{ или после преобразований } \frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1})_{\dot{A}}^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1})_{\dot{A}}^2} = 1;$$

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} \quad (109)$$

Сложное напряженное состояние

откуда $\frac{1}{i_{\sigma}^2} + \frac{1}{i_{\tau}^2} = \frac{1}{i^2}$, или (109), где

n – общий коэффициент запаса выносливости детали; n_{σ}, n_{τ} – частные коэффициенты запаса выносливости по

нормальным и касательным напряжениям (108).

Асимметричный цикл. Простое напряженное состояние

Приведем окончательные формулы (110), полученные Серенсенем и Кинасошвили на основе схематизированной диаграммы Смита.

$$i_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\hat{E}_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} \sigma_a + \psi_{\sigma} \sigma_m}; \quad i_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\hat{E}_{\tau}}{\varepsilon_{\tau} \beta_{\tau}} \tau_a + \psi_{\tau} \tau_m} \quad (110)$$

Асимметричный цикл. Простое напряженное состояние

В формулах (110) ψ – коэффициент чувствительности материала к

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \quad (111)$$

коэффициент чувствительности материала к асимметрии цикла

асимметрии цикла определяется по формулам (111). Можно принять следующие значения: для углеродистых

сталей $\psi_{\sigma}=0,1\div 0,2$; $\psi_{\tau}=0,0\div 0,1$; для легированных сталей $\psi_{\sigma}=0,2\div 0,3$; $\psi_{\tau}=0,1\div 0,15$.

Асимметричный цикл. Сложное напряженное состояние

Коэффициент запаса выносливости определяется по формуле (109), где значения частных коэффициентов вычисляются отдельно по формулам (110).

КРАТКИЙ ОБЗОР МАТЕРИАЛА

В течение курса мы рассмотрели влияние на прочность и жесткость деталей при *простых видах деформации* поперечного сечения детали, материала и нагрузки.

Влияние на прочность и жесткость поперечного сечения детали

Прочность и жесткость деталей зависят от формы, размеров поперечного сечения и его расположения относительно направления действия нагрузки (координатных осей). К основным характеристикам сечения, позволяющим количественно учесть перечисленные факторы, относят:

- площадь сечения A , размерность $A - м^2$. Площадь сечения является характеристикой прочности и жесткости сечения при растяжении, сжатии и срезе детали;
- статические моменты сечения S_x и S_y ; размерность $S - м^3$. Статические моменты используются при определении координат центра составного сечения и для вычисления касательных напряжений при изгибе;
- моменты инерции сечения: осевые I_x и I_y , полярный I_p , центробежный I_{xy} ; размерность $I - м^4$. Осевые моменты инерции являются характеристикой жесткости сечения при изгибе, полярный момент инерции характеризует жесткость сечения при кручении, центробежный момент инерции самостоятельного значения не имеет и используется во вспомогательных расчетах;
- моменты сопротивления сечения: осевые W_x и W_y , полярный W_p ; размерность $W - м^3$. Осевые моменты сопротивления сечения являются характеристикой прочности сечения при изгибе, полярный момент сопротивления характеризует прочность сечения при кручении;
- радиусы инерции сечения i_x и i_y ; размерность $i - м$. Радиусы инерции сечения характеризуют устойчивость сечения при сжатии.

Важное место в расчетах занимают так называемые главные оси инерции сечения и значения геометрических характеристик относительно этих осей. Главными называют оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю $I_{xy}=0$, а осевые моменты инерции экстремальны: $I_1=I_{max}$ и $I_2=I_{min}$ (главные моменты инерции сечения). Частным признаком главных осей инерции является наличие в сечении хотя бы одной оси симметрии. При проектировании деталей рекомендуется сечения выполнять симметричными относительно двух осей, что позволяет избежать распространенных ошибок в прочностных и деформационных расчетах, особенно для тонкостенных стержней.

Характеристики простых геометрических фигур вычисляются по расчетным формулам. Геометрические характеристики стандартных профилей проката (уголков, двутавров, швеллеров) содержатся в таблицах сортамента проката, которые имеются во всех учебниках и задачниках по сопротивлению материалов, а также в справочной литературе.

Геометрические характеристики составных сечений определяются зависимостью между моментами инерции относительно параллельных осей.

Влияние на прочность и жесткость детали материала

Прочностные свойства материала определяются значением опасных напряжений, которые находят экспериментально. Для пластичных материалов это предел текучести σ_T , для хрупких материалов – предел прочности σ_B . В расчетах на прочность опасные напряжения фигурируют в виде допускаемых напряжений $[\sigma] = \sigma_{опасн}/n$, значения которых при различных видах деформации берутся из справочных таблиц. Условия прочности по нормальным и касательным напряжениям имеют следующий вид: $\sigma_{max} \leq [\sigma]$ и $\tau_{max} \leq [\tau]$.

Жесткость материала определяется значениями модуля упругости E при действии нормальных напряжений и модуля сдвига G при действии касательных напряжений, которые находят экспериментальным путем.

Влияние на прочность и жесткость детали внешней нагрузки

Прочность и жесткость детали определяются значениями напряжений, возникающих в материале, и значениями характеристик деформации. Между характеристиками нагруженности и деформации существует прямо пропорциональная зависимость – закон Гука: $\sigma = E\varepsilon$; $\tau = G\gamma$. Закон Гука лежит в основе расчетных формул сопротивления материалов. При аналитическом определении напряжений в материале детали и характеристик деформации сначала находят не сами напряжения, а их статические эквиваленты в сечении – внутренние силовые факторы. В общем случае нагружения в сечении детали могут возникнуть 6 внутренних силовых факторов: продольная (нормальная) сила N , две поперечные силы Q_x и Q_y , крутящий момент T_k и два изгибающих момента M_x и M_y . Значения внутренних силовых факторов находят методом сечений, который является основным методом сопротивления материалов. По наличию в сечении тех или иных внутренних силовых факторов различают 4 простых вида деформации: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, чистый изгиб. Различные сочетания простых видов деформации дают сложное сопротивление, которое будет рассматриваться во втором семестре.

Основные параметры изученных видов деформации приведены в следующей таблице.

Основные параметры простых видов деформации

Параметры	Виды деформации			
	растяжение, сжатие	сдвиг	кручение	плоский изгиб
1	2	3	4	5
Внутренний силовой фактор в сечении	N	Q	T_k	$M_x; Q$
Напряжения в любой точке	$\sigma = \frac{N}{A}$	$\tau \approx \frac{Q}{A_{cp}}$	$\tau = \frac{T_k}{I_p} \rho$	$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$ $\tau = \frac{QS_x^*}{I_x b^*}$
максимальные	$\sigma_{\max} = \frac{ N _{\max}}{A}$	$\tau_{\max} \approx \frac{ Q _{\max}}{A_{cp}}$	$\tau_{\max} = \frac{ T_k }{W_p}$	$\sigma_{\max} = \frac{ M_x _{\max}}{W_x}$ $\tau_{\max} = \frac{ Q _{\max} S_x^* _{\max}}{I_x b^*}$
Условие прочности общее	$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$	$\tau_{\max} \leq [\tau]$	$\tau_{\max} \leq [\tau]$	$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$ $\tau_{\max} \leq [\tau]$
конкретизированное	при растяжении $\frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma]_p$ при сжатии $\frac{ N _{\max}}{A} \leq \varphi[\sigma]_{\tilde{n}\alpha}$	$\frac{ Q _{\max}}{A_{cp}} \leq [\tau]_{cp}$	$\frac{ T_k }{W_p} \leq [\tau]_{kp}$	$\frac{ M_x _{\max}}{W_x} \leq [\sigma]_{\text{изг}}$ $\frac{ Q _{\max} S_x^* _{\max}}{I_x b^*} \leq [\tau]$

1	2	3	4	5
Характеристика прочности сечения	A	A_{cp}	W_p	W_x
Характеристика деформации абсолютная относительная	$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ $\varepsilon = \frac{N}{EA}$	$\Delta S = \frac{Ql}{GA_{cp}}$ $\gamma = \frac{Q}{GA_{cp}}$	$\varphi = \frac{T_k l}{GI_p}$ $\theta = \frac{T_k}{GI_p}$	$y = \iint \frac{M_x dz}{EI_x}$ $\theta = \int \frac{M_x dz}{EI_x}$
Жесткость детали	EA	GA_{cp}	GI_p	EI_x
Характеристика жесткости сечения	A	A_{cp}	I_p	I_x
Характеристика жесткости материала	E	G	G	E
Потенциальная энергия упругой деформации	$\Pi = \sum \int \frac{N^2 dz}{2EA}$	$\Pi = \sum \int k \frac{Q^2 dz}{2GA}$	$\Pi = \sum \int \frac{T_k^2 dz}{2GI_p}$	$\Pi = \sum \int \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Куликов, Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие / Ю.А. Куликов. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 272 с. – ISBN 978-5-8114-2449-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/91882> (дата обращения: 25. 06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
2. Молотников, В.Я. Курс сопротивления материалов: учебное пособие / В.Я. Молотников. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 384 с. – ISBN 978-5-8114-0649-4. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/71756> (дата обращения: 25.06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
3. Сопротивление материалов: теория, тестовые задания, примеры решения: учеб. пособие / С.Г. Сидорин, Ф.С. Хайруллин. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2018. – 184 с. – (Высшее образование). – DOI: <https://doi.org/10.12737/1694-7>. – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/792606> (ЭБС ИНФРА-М)
4. Сопротивление материалов: Сборник задач с решениями: учеб. пособие / С.И. Евтушенко, Т.А. Дукмасова, Н.А. Вильбицкая. – 2-е изд. – М. : РИОР : ИНФРА-М, 2017. – 344 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа <http://www.znanium.com>]. – (Высшее образование: Бакалавриат). – https://doi.org/10.12737/textbook_58dbbcc2cb9a9 – Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/792242> (ЭБС ИНФРА-М)
5. Кузьмин, Л.Ю. Сопротивление материалов / Л.Ю. Кузьмин, В.Н. Сергиенко, В.К. Ломунов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 228 с. – ISBN 978-5-8114-2056-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com/book/90004> (дата обращения: 25.06.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей. (ЭБС ЛАНЬ)
6. Степин П.А. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебник. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2014. – 320 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=3179 – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
7. Миролубов, И.Н. Сопротивление материалов. Пособие по решению задач. [Электронный ресурс] / И.Н. Миролубов, Ф.З. Алмаметов, Н.А. Курицин, И.Н. Изотов. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2014. – 512 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com/book/39150> – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
8. Молотников В. Я. Механика конструкций. Теоретическая механика. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2012. – 540 с. – Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=4546 – Загл. с экрана. (ЭБС ЛАНЬ)
9. Механика: Учебное пособие / В.Л. Николаенко. – М.: ИНФРА-М; Мн.: Нов. знание, 2011. – 636 с.: ил.; 60x90 1/16. – (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-16-004865-9.
10. Жуков, В.Г. Механика. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Электрон. дан. – СПб.: Лань, 2012. – 415 с. – Режим доступа: <http://e.lanbook.com>

Составители: Шибков Александр Анатольевич
Булгаков Сергей Алексеевич
Тихонкин Игорь Васильевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка С.А. Булгаков

Подписано в печать 29 сентября 2020 г.
Формат 84×108/32. Объем 7,5 уч.-изд. л
Тираж 100 экз. Изд. № . Заказ №

Отпечатано в мини-типографии Инженерного института
630039, г. Новосибирск, ул. Никитина, 147

