Кафедра теоретической и прикладной механики

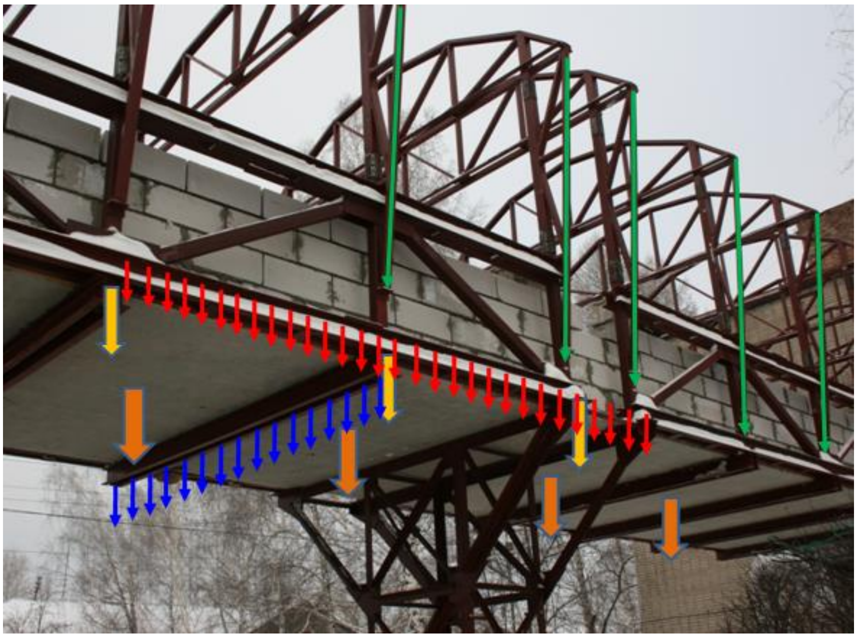
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Инженерный институт

МЕХАНИКА

Задания и методические указания для практических занятий, самостоятельной и контрольной работы

Часть 1. Теоретическая механика



Новосибирск 2021

Кафедра теоретической и прикладной механики

Механика: задания и метод. указания для практических занятий, самостоятельной и контрольной работы. Ч.1 Теоретическая механика / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т.; сост.: С.А. Булгаков, Е.А. Пшенов, И.В. Тихонкин. – Новосибирск, 2021. – 28 с. изд. перераб. и доп.

Методическая разработка содержит задания для самостоятельной работы студентов по дисциплине Механика раздел «Теоретическая механика», выполняемой индивидуально каждым студентом в аудитории под руководством преподавателя, а также варианты заданий для контрольной работы. Содержание контрольной работы формируется в соответствии с изучаемыми темами согласно рабочим программам дисциплин.

Предназначена для студентов очной формы обучения по направлению подготовки Профессиональное обучение (по отраслям) Инженерного института при изучении и закреплении соответствующих тем дисциплины Механика.

Методическая разработка рекомендована студентам других факультетов ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ, обучающимся по инженерным направлениям подготовки (Природообустройство и водопользование, Продукты питания из растительного сырья, Продукты питания животного происхождения, Технология продукции и организация общественного питания), изучающим соответствующие разделы и темы дисциплин Механика и Прикладная механика, согласно утвержденным учебным планам и рабочим программам дисциплин.

Утверждена и рекомендована к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол от 29 сентября 2021 г. № 2)

ВВЕДЕНИЕ

При освоении учебного материала, особенно в самостоятельной работе студентов по дисциплине Механика, разделу «Теоретическая механика», в соответствии с учебным планом и рабочей программой целесообразно придерживаться следующей последовательности изучения:

– ознакомиться с содержанием программы и подобрать рекомендованную учебную литературу и информационные ресурсы;

– внимательно и вдумчиво прочитать материал всей темы (не производя выводов и доказательств),

– разобраться в основных понятиях, определениях, законах правилах, следствиях и в их логической взаимосвязи;

– тщательно и подробно изучить материал, конспектируя основные положения, определения, доказательства и правила;

– проанализировать исходные данные, схемы приложения сил и решить типовые задачи в аудитории под руководством преподавателя;

– закрепить усвоение материала путем разбора решенных задач, приведенных в учебной литературе, а также самостоятельным решением возможно большего числа задач;

– выполнить, оформить контрольную работу и защитить ход решения;

– подготовиться к сдаче экзамена;

– уметь применять полученные навыки расчетов при выполнении курсовых работ и проектов по общепрофессиональным и специальным дисциплинам, а также конструкторской части выпускных квалификационных работ

Приступая к решению задач, следует предварительно повторить и вопросы ранее изученных тем, касающиеся содержания данной задачи.

Изучение учебного материала предусматривает закрепление умений решения ряда задач по темам раздела «Теоретическая механика» – «Статика», «Кинематика», «Динамика»:

Задание 1. Равновесие плоской системы сходящихся сил

Задание 2. Равновесие произвольной плоской системы сил

Задание 3. Определение центра тяжести плоской фигуры

Задание 4. Преобразование простейших движений тел

Задание 5. Динамика механической системы.

1. Общие указания к оформлению решений заданий

Каждая задача должна содержать расчётную схему, исходные данные и решение. Исходные данные и номер расчётной схемы выбираются в зависимости от шифра студента из соответствующих таблиц.

Решение каждой задачи следует начинать на новой странице. Необходимо указать номер задачи, привести исходные данные и указать величины, подлежащие определению. Затем выполняется расчётная схема и приводится решение. Чертёж должен быть аккуратным, достаточной крупным, все точки, углы, тела и их расположение на схеме должны соответствовать условиям решаемого варианта задачи. Направления векторов скоростей, ускорений, угловых скоростей и угловых ускорений должны быть показаны ясно. Решения задач необходимо сопровождать краткими пояснениями. В конце каждого решения необходимо привести ответ в численной форме с указанием размерности.

2. Общие методические указания

Для освоения учебной дисциплины «Механика» раздел «Теоретическая механика» следует иметь соответствующую математическую подготовку. Нужно уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически и аналитически сумму векторов, вычислять векторное произведение двух векторов, дифференцировать и интегрировать функции одного переменного, быть знакомым с понятиями о радиусе кривизны линии.

К решению задачи № 1 следует приступать после изучения темы «Плоская система сходящихся сил». Задача решается составлением и последующим решением уравнений равновесия системы сходящихся сил.

Задача № 2 является задачей на исследование равновесия тела под действием произвольной плоской системы сил. При решении этой задачи необходимо также составить уравнения равновесия тела под действием сил.

Задача № 3 посвящена определению положения центра тяжести составной плоской фигуры по формулам и требует знаний положения центров тяжести прямоугольника, треугольника и полукруга.

К решению задачи № 4 следует приступать после изучения раздела «Кинематика». Эта задача посвящена определению кинематических характеристик вращательного движения твёрдых тел, скоростей и ускорений их точек.

Задача № 5 является задачей на исследование динамики механической системы, для решения которой рекомендуется составить общее уравнение динамики. При этом студент должен применить последовательно принципы Даламбера (кинетостатики) и возможных перемещений.

3. Методические указания к решению задачи 1

Систему сил называют сходящейся, если линии их действия пересекаются в одной точке. Система сходящихся сил $\left\{\overline{F_1}, \overline{F_2}, \dots, \overline{F_n}\right\}$ эквивалентна одной силе $\overline{R}$, называемой равнодействующей, которая равна геометрической сумме всех сил системы и проходит через точку пересечения линий их действия

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\boldsymbol{F}_k} \ .$$

Величину и направление равнодействующей удобно определять аналитически. Так, если за систему отсчета принять прямолинейные ортогональные оси координат Oxyz, то, задачу о сложении сил можно решить с помощью следующих соотношений:

$$\boldsymbol{R_x = \sum X_k; \quad R_y = \sum Y_k; \quad R_z = \sum Z_k;}$$

$$\boldsymbol{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_x^2}} \ ,$$

где $\boldsymbol{X_k, Y_k, Z_k}$ - проекции $\overline{\mathrm{F}_\mathrm{k}}$ соответственно на оси x, y, z;

Существуют геометрическая и аналитическая формы условий равновесия системы сходящихся сил:

- для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы ее силовой многоугольник был замкнут;

- для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно равенства нулю сумм проекций всех сил системы на оси координат

$$\boldsymbol{\sum X_k = 0, \sum Y_k = 0, \sum Z_k = 0.}$$

Задание 1. Определить усилия в стержнях конструкции. Номер схемы на рисунке 1 соответствует последней цифре шифра. Исходные данные для расчёта выбрать из строки таблицы 1, соответствующей предпоследней цифре шифра.

Последовательность решения задачи:

1. Изобразить на схеме реакции стержней;
2. Составить два уравнения равновесия для точки В;
3. Из уравнений равновесия найти реакции стержней;

Таблица 1. Исходные данные к задаче 1 самостоятельной работы

Предпоследняя цифра шифра	F_1, кН	F_2, кН
0	10	20
1	15	5
2	20	10

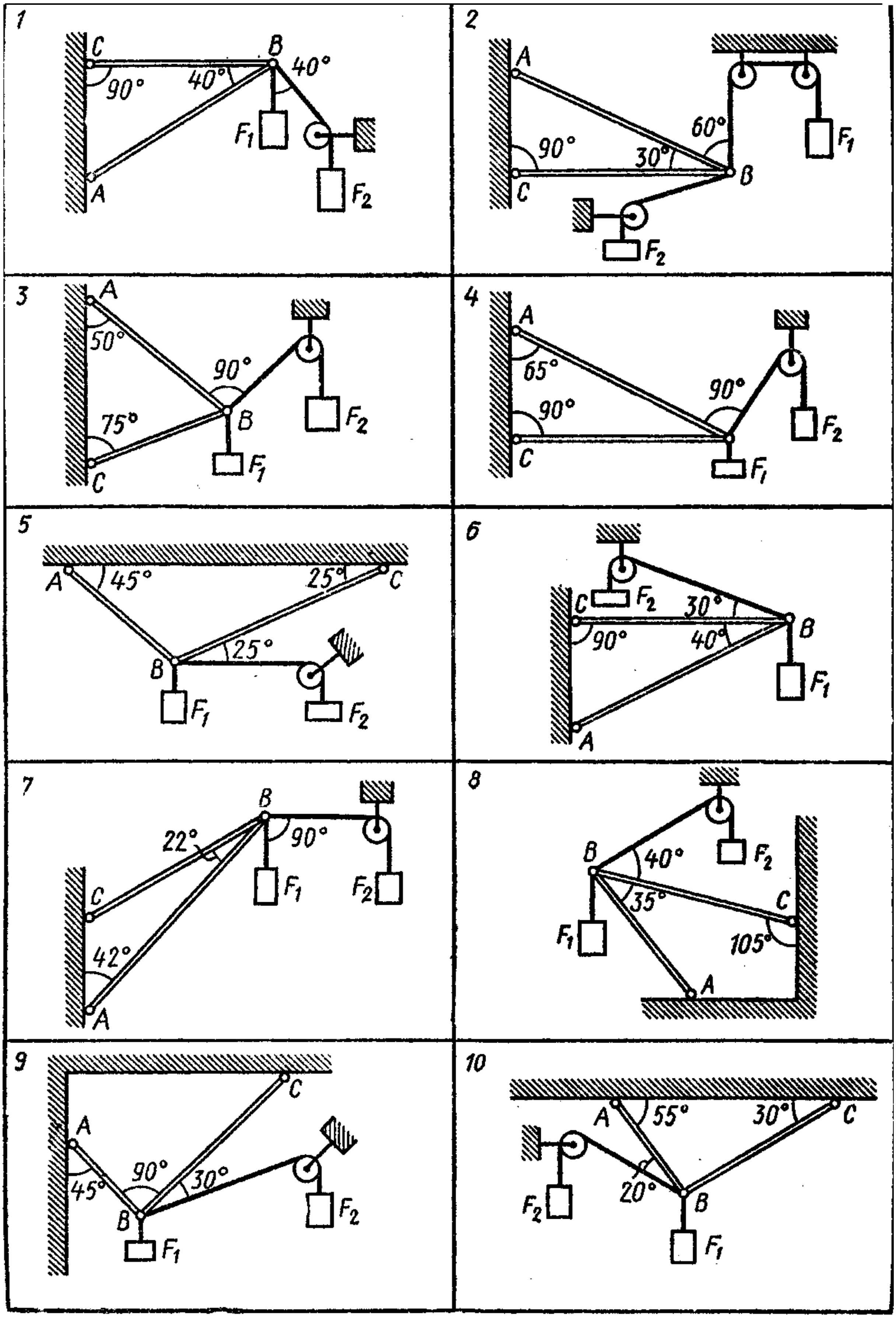


Рисунок 1. Схемы к заданию 1

Пример решения задания 1.

Определить усилия в стержнях AB и BC конструкции (Рис. 2), находящейся под действием силы F=1 кН.

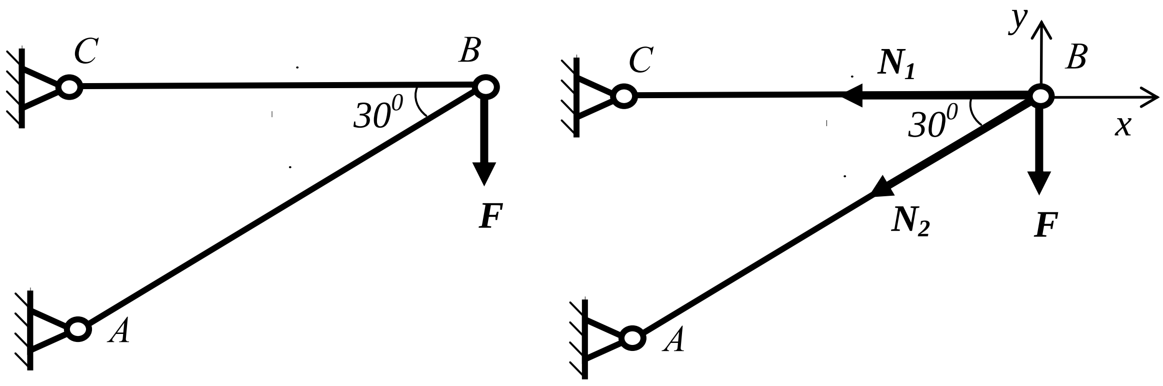


Рисунок 2 к примеру решения задания 1

Реакции стержней N_1 и N_2 направим вдоль стержней из точки B, считая стержни растянутыми. Так как силы F, N_1 и N_2 образуют плоскую систему сходящихся сил, составим условие их равновесия в аналитической форме, указав направление координатных осей *x* и *y*:

$$\sum F_{kx} = 0 : -N_1 - N_2 \cdot \cos 30^0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0 : -F - N_2 \cdot \sin 30^0 = 0 \quad (2)$$

Из уравнения (2) определим величину реакции N_2 стержня AB:

$$N_2 = \frac{-F}{\sin 30^0} = \frac{-1}{0,5} = -2кН .$$

Знак (–) показывает, что стержень AB не растянут, как предполагалось изначально, а сжат, т.е. направление реакции N_2 противоположно указанному на схеме.

Величину реакции N_1 стержня BC находим из уравнения (1):

$$N_1 = -N_2 \cdot \cos 30^0 = -(-2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1,73кН .$$

Ответ: N_1=1,73 кН; N_2=-2 кН.

4. Методические указания к решению задачи 2

Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O называют векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы на вектор силы:

$$\overline{M_0}(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F},$$

где $\overline{r}$ - радиус-вектор точки A приложения силы $\overline{F}$.

Модуль (величина) вектора $\overline{M_0}$ определяется выражением

$$M_0(\overline{F}) = rF \sin\alpha = F \cdot h .$$

Здесь h - плечо силы, равное кратчайшему расстоянию от точки O до линии действия силы $\overline{F}$.

α - угол между векторами $\overline{r}$ и $\overline{F}$.

Для плоской системы сил удобно пользоваться алгебраическим значением момента. Алгебраическая величина момента равна произведению модуля силы на плечо, взятому со знаком плюс или минус. При этом момент считается положительным, если сила стремится повернуть свое плечо против хода часовой стрелки, и отрицательным в противном случае.

$$\mathbf{M} = \pm \mathbf{Fh}$$

Сумму векторов моментов всех сил системы относительно произвольного центра O называют главным моментом системы относительно этого центра

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_k).$$

Согласно теореме Пуансо система сил, действующая на твердое тело, эквивалентна главному вектору системы, приложенному к произвольному центру (точке тела), и ее главному моменту относительно этого центра.

Для равновесия тела, находящегося под действием произвольной системы сил, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия равенства нулю главного вектора и главного момента этой системы:

$$\overline{R_0} = 0, \quad \overline{M_0} = 0.$$

Необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил могут быть представлены в трех формах:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_0 = 0,$$
$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0,$$
$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum X_k = 0.$$

Задание 2. Определить реакции опор двухопорной балки. Номер схемы на рисунке 5 соответствует последней цифре шифра. Данные для расчёта выбрать из строки таблицы 2, соответствующей предпоследней цифре шифра.

Последовательность решения задачи:

1. Изобразить на схеме реакции опор;
2. Составить три уравнения равновесия для балки;
3. Из уравнений равновесия найти реакции опор;
4. Выполнить проверку расчётов, составив четвёртое уравнение равновесия. Погрешность вычислений допускается не более 3%.

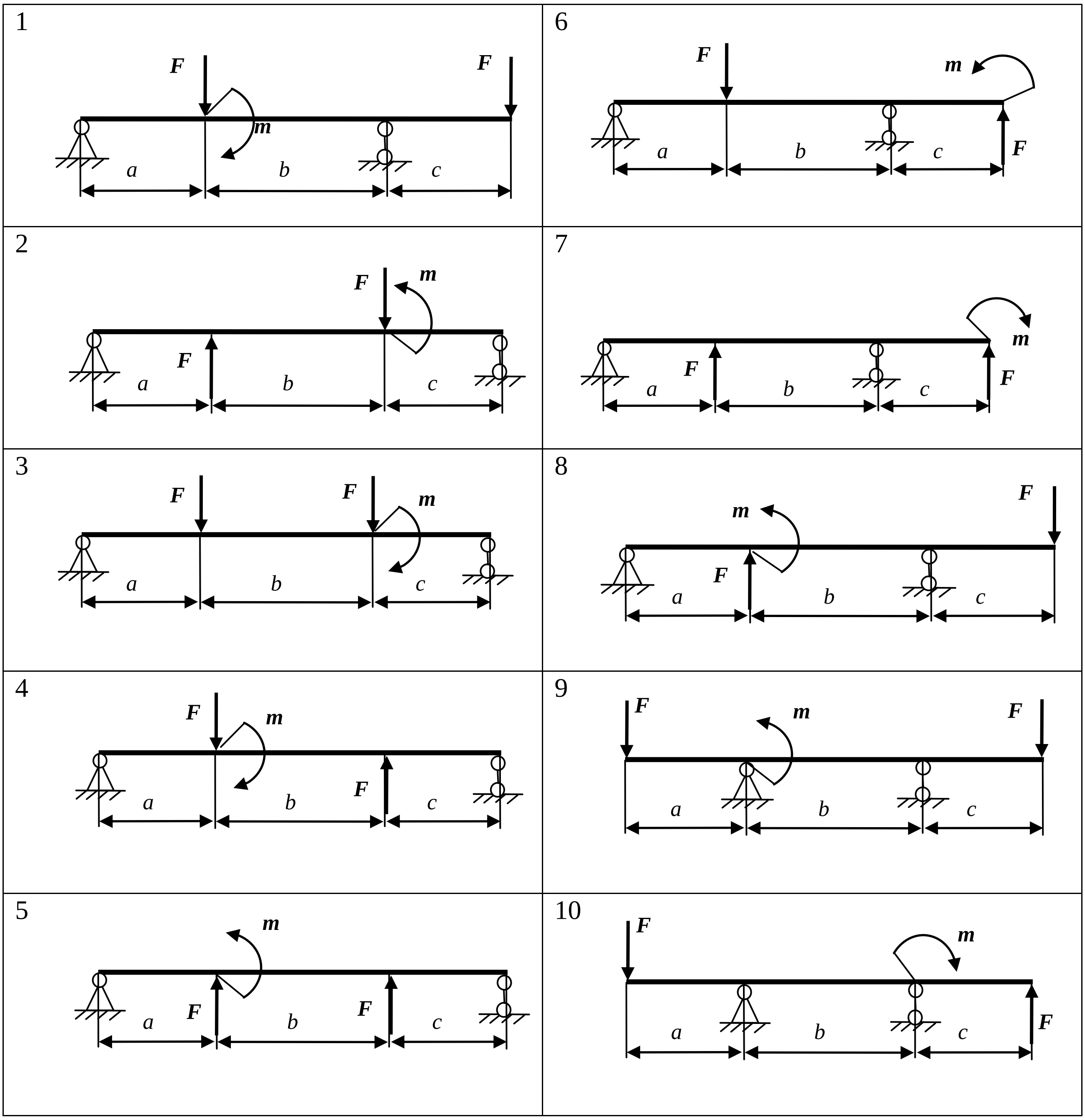


Рисунок 3. Схемы к заданию 2

Таблица 2 - Исходные данные к заданию 2

№ строки	*a, м*	*b, м*	*c, м*	*F, кН*	*m, кНм*
0	2	4	3	10	5
1	4	3	2	8	10
2	3	2	4	12	3
3	5	3	2	5	8

Пример выполнения задания 2.

Для балки, изображенной на рисунке 4, определить реакции связей, удерживающих ее в равновесии.

Исходные данные: $\alpha=30^0$, q=26 кН/м, F=12 кН, M=8 кН*м, a=0,8м, b=1,2м, c=0,6м.

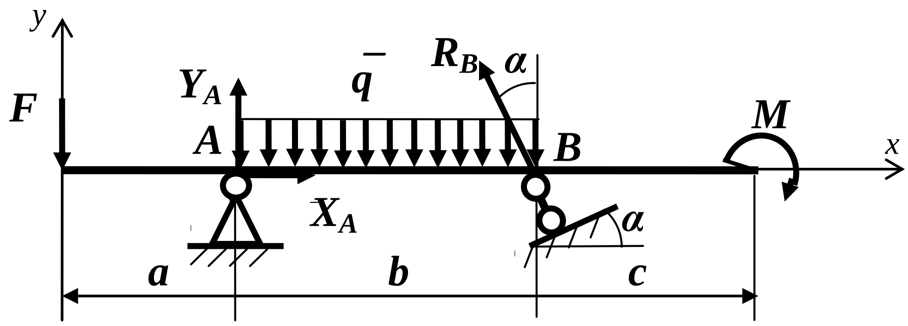


Рисунок 4 к примеру решения задачи 2

Заменив опоры их реакциями X_A, Y_A и R_B, составим уравнения равновесия балки:

$$\sum X = 0: \quad X_A - R_B \sin\alpha = 0 \quad ;$$

$$\sum M_B = 0: \quad F\cdot(a+b) + q\cdot b\cdot\frac{b}{2} - M - Y_A\cdot b = 0\,;$$

$$\sum M_A = 0: \quad F\cdot a - q\cdot b\cdot\frac{b}{2} - M + R_B\cos\alpha\cdot b = 0 \quad .$$

Решая уравнения равновесия, определим реакции опор:

$$R_B = \frac{-F\cdot a + q\cdot b\cdot\frac{b}{2} + M}{b\cdot\cos\alpha} = \frac{-12\cdot 0{,}8 + 26\cdot 1{,}2\cdot 0{,}6 + 8}{1{,}2\cdot 0{,}866} = 16{,}47 \text{ кН}$$

$$X_A = R_B\sin\alpha = 16{,}474\cdot 0{,}5 = 8{,}23 \text{ кН}$$

$$Y_A = \frac{F\cdot(a+b) + q\cdot b\cdot\frac{b}{2} - M}{b} = \frac{12\cdot 2 + 26\cdot 1{,}2\cdot 0{,}6 - 8}{1{,}2} = 28{,}93 \text{ кН}$$

Для проверки правильности решения составим еще одно уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0: Y_A + R_B\cos\alpha - q\cdot b - F = 28{,}93 + 16{,}47\cdot 0{,}866 - 26\cdot 1{,}2 - 12 =$$

$$= 43{,}19\text{-}43{,}2 = 0{,}01..$$

Погрешность вычислений составляет $\boldsymbol{\frac{0{,}01}{43{,}2}\cdot 100\% \lhd 1\%}$,

что допускается.

Ответ: X_A=8,237 кН; Y_A=28,934 кН; R_B=16,474 кН.

5. Методические указания к решению задачи 3

Центром тяжести твердого тела называют неизменно связанную с этим телом точку *C*, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела при любых его положениях в пространстве.

Ограничимся рассмотрением метода определения центра тяжести плоской фигуры. Для однородного тела, имеющего форму тонкой пластины постоянной толщины, существуют следующие формулы для определения координат ее центра тяжести

$$x_c = S_y / A, \quad y_c = S_x / A,$$

где S_x, S_y – осевые статические моменты плоской фигуры относительно осей x и y, лежащих в ее плоскости;

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^{n} x_k A_k$$

где $A = \sum A_k$ – площадь фигуры;

A_k, x_k, y_k – площади и координаты центров тяжести частей, составляющих фигуру.

Задание 3. Для однородной пластины сложной формы, изображенной на схеме (рис. 5), найти и указать положение центра тяжести. Данные выбрать из столбца табл. 3 в соответствии с предпоследней цифрой шифра**.**

Последовательность решения задачи:

1. Изобразить плоскую фигуру в масштабе;
2. Разделить плоскую фигуру на простейшие;
3. Определить для каждой простейшей фигуры площадь и координаты центра тяжести в принятой системе координат;
4. Вычислить статические моменты инерции простейших фигур относительно координатных осей
5. Определить координаты центра тяжести составной фигуры по формулам: $x_c = S_y / A$, $y_c = S_x / A$

Таблица 3 - Исходные данные для задания 3

Предпоследняя цифра шифра	0	1	2	3
a (дм)	12	6	8	9
b (дм)	4	12	9	6
c (дм)	6	9	6	12

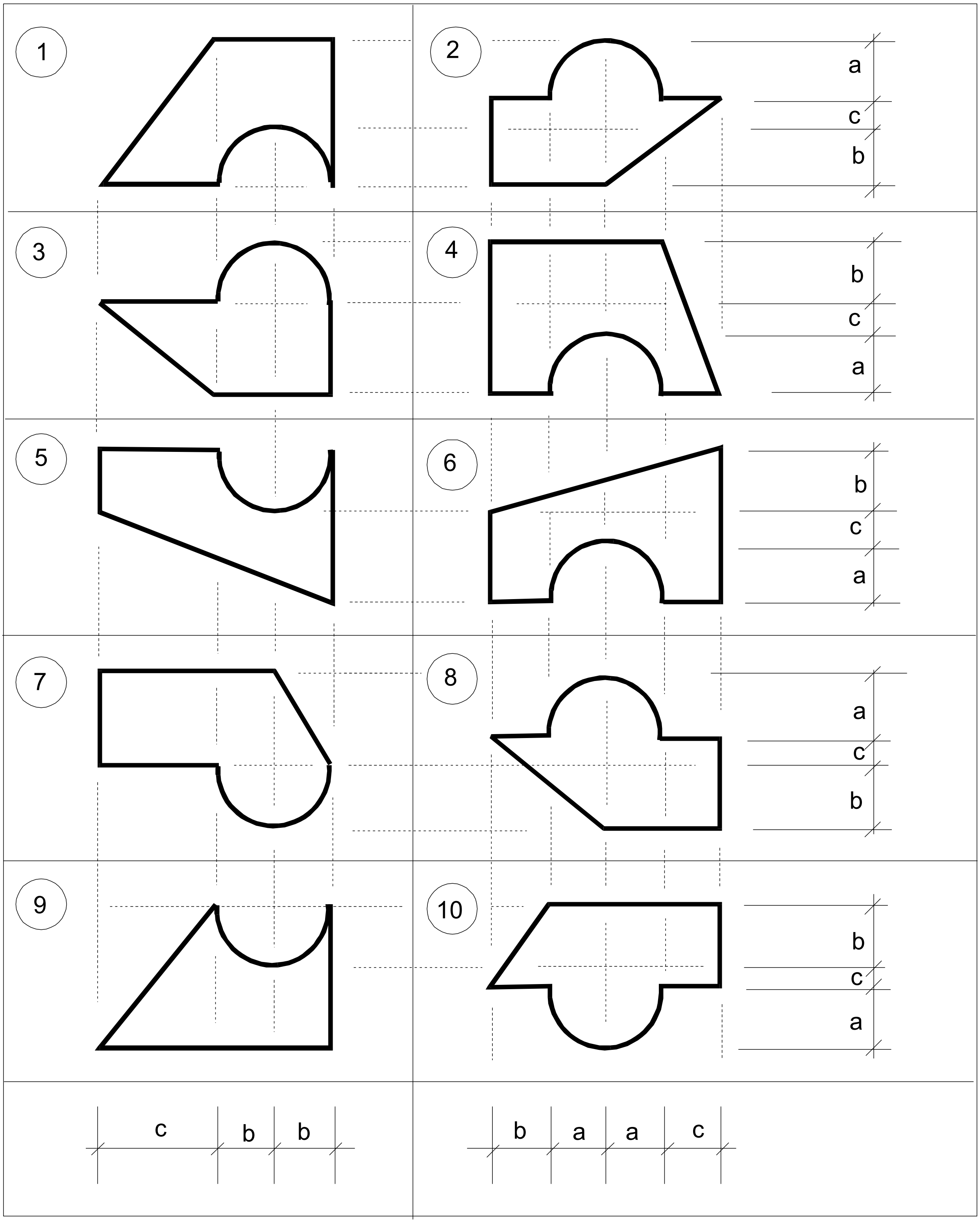


Рисунок 5. Схемы к заданию 3

Пример выполнения задания 3. Определить положение центра тяжести плоской фигуры (рис. 6).

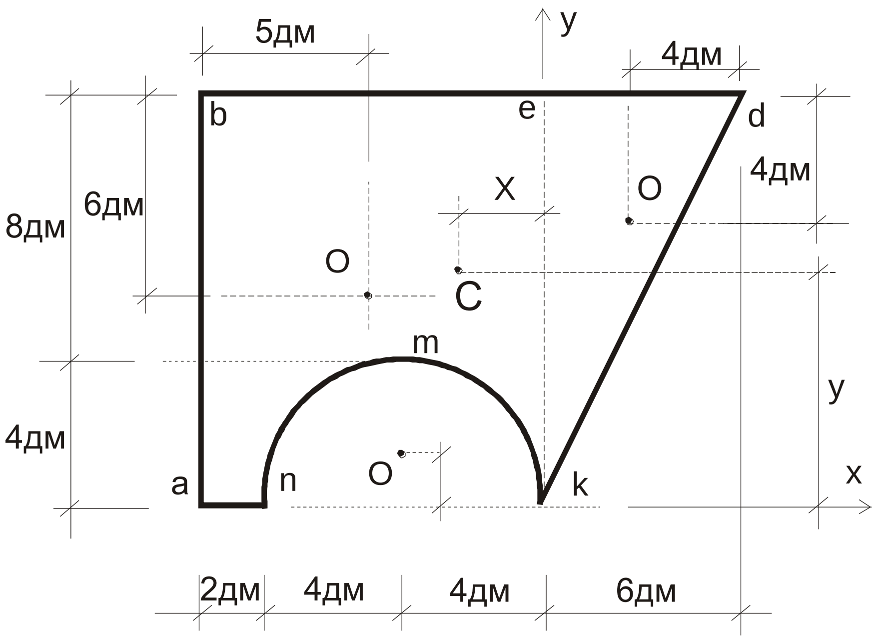


Рисунок 6 к примеру решения задачи 3

Разобьём данную фигуру на составляющие ее части: прямоугольник *abek*, треугольник *ked* и полукруг *mnk*, зафиксировав на рисунке положения их центров тяжести (точки O_1, O_2, O_3). При этом ординату центра тяжести полукруга вычисляем по формуле:

$$y_{0_3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \approx 0{,}425r \approx 0{,}425 \cdot 4 \approx 1{,}7(\text{дм}).$$

Положение центра тяжести фигуры определим относительно произвольно выбранной системы координат *xKy* с помощью формул

$$x_c = S_y / A, \quad y_c = S_x / A.$$

Обозначим через x_i, y_i, A_i - координаты центров тяжести и площади составляющих фигуру частей.

Результаты расчётов удобно представить в форме таблицы:

Номер части	x_i, дм	y_i, дм	A_i, дм^2	x_iA_i, дм^3	y_iA_i, дм^3
1	-5	6	120	-600	720
2	-4	1,7	-25,13	100,5	-42,72
3	2	8	36	72	288

Так как $A = \sum A_i = 120 - 25{,}13 + 36 \approx 130{,}9$ дм^2,

$$S_x = \sum y_iA_i = 720 - 42{,}72 + 288 = 965{,}3 \text{ дм}^3,$$

$$S_y = \sum x_iA_i = -600 + 100{,}5 + 72 = -427{,}5 \text{ дм}^3,$$

Окончательно получим:

$$x_c = -427{,}5/130{,}9 \approx -3{,}27 \text{ дм}, \quad y_c = 465{,}5/130{,}9 \approx 7{,}37 \text{ дм}.$$

Положение центра тяжести отметим на чертеже фигуры.

6. Методические указания к решению задачи 4

К простейшим движениям относят поступательное движение тела и вращение его вокруг неподвижной оси (вращательное).

При поступательном движении любой отрезок прямой, проведённый в теле, остаётся параллельным самому себе. Все точки тела движутся по идентичным траекториям, а их скорости и ускорения одинаковы. Поэтому изучение поступательного движения тела сводится к исследованию движения любой из его точек.

При вращательном движении точки тела движутся по окружностям в параллельных плоскостях, причём центры окружностей расположены на оси вращения. Такое движение вполне определяется углом поворота тела относительно некоторого начального положения $\varphi = \varphi(t)$.

Угловая скорость тела в момент времени t определяется как производная от угла его поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение тела в момент времени t равно производной от угловой скорости или второй производной угловой координаты по времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

При определении скорости и ускорений точки вращающегося тела можно применить формулы:

$$V = \omega R,$$

$$a_n = \omega^2 R,$$

$$a_\tau = \varepsilon R,$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Задание №4 Ведущее звено 1 (Рис. 7) вращается по закону $\varphi_1 = \varphi_1(t)$. Радиусы колёс равны R_1, R_2, r_2, R_3, r_3. В момент времени t =1 С определить угловые скорости и ускорения всех колёс, скорость и ускорение груза 4, передаточное отношение привода U_{13}, ускорение точки Д. направления скоростей и ускорений указать на схеме.

Исходные данные для задачи выбрать из строки таблицы 4, соответствующей последней цифре шифра. Схему на рисунке выбрать в соответствии с предпоследней цифрой шифра (для вариантов 01-10 - схема 1, для вариантов 11-20 - схема 2, для вариантов 21-30 - схема 3, для вариантов 31 и далее - схема 4)

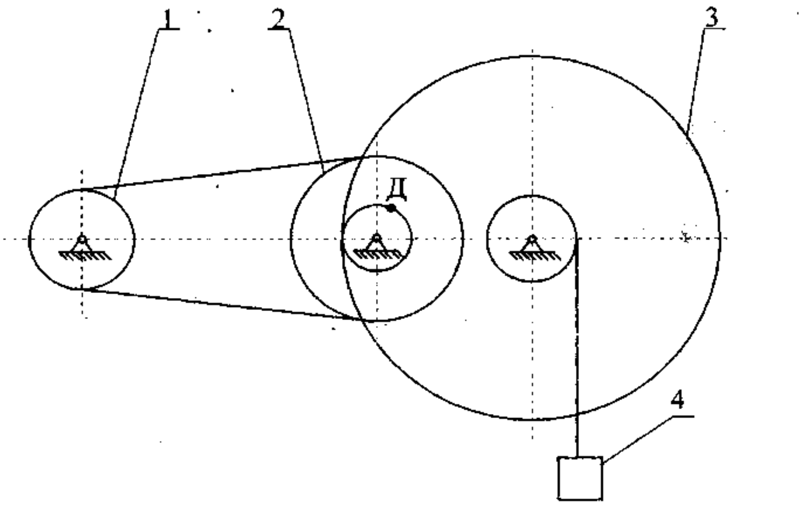


Схема 1

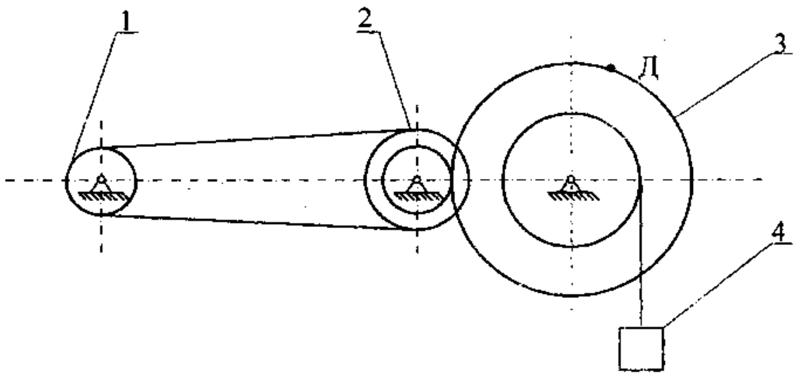


Схема 2

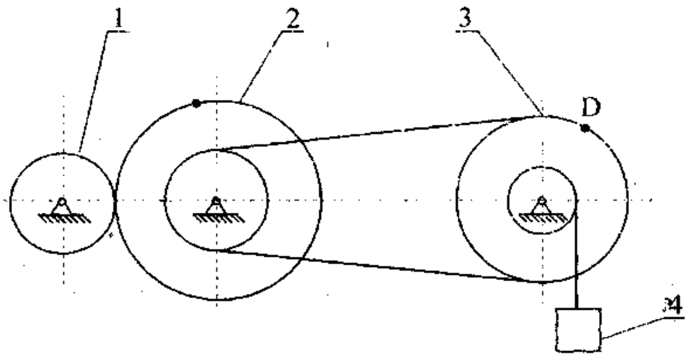


Схема 3

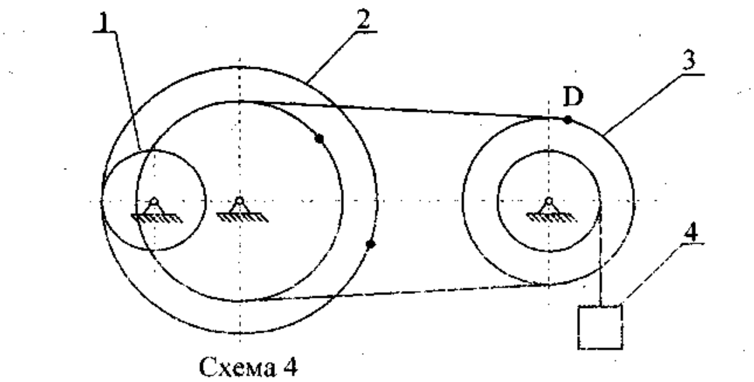


Схема 4

Рисунок 7. Схемы к заданию 4

Таблица 4. Исходные данные к задаче 4

№ строки	R_1, см	R_2, см	r_2, см	R_3, см	r_3, см	$\varphi_1(t)$
1	10	16	10	30	15	$4(t^2-t)$
2	20	30	10	24	20	$3t^2-8t$
3	15	30	20	40	25	$6t^3-12t^2$
4	15	20	10	25	10	t^2-2t^3
5	20	24	12	30	15	$10t^2-5t^3$
6	10	16	10	30	15	$2(t^2-t)$
7	20	30	10	24	20	$5t-4t^2$
8	15	30	20	40	25	$15t-3t^3$
9	15	20	10	25	10	$2t^3-11t$
0	20	24	12	30	15	$6t^2-3t^3$

Пример выполнения задания 4.

Движение груза 1 с помощью грузоподъёмного устройства (Рис.8) происходит по закону $x = At^2 + Bt + C$. В начальный момент времени ($t=0$) положение груза измеряется координатой $x_0 = 8см$, а его скорость $v_0 = \dot{x}_0 = 5\,{см}/{с}$. В заданный момент времени $t_2 = 3с$ координата груза $x_2 = 347\,см$. Параметры грузоподъёмного устройства:

$r_2 = 20см; R_2 = 45см; r_3 = 15см; R_3 = 40см; R_4 = 5см$

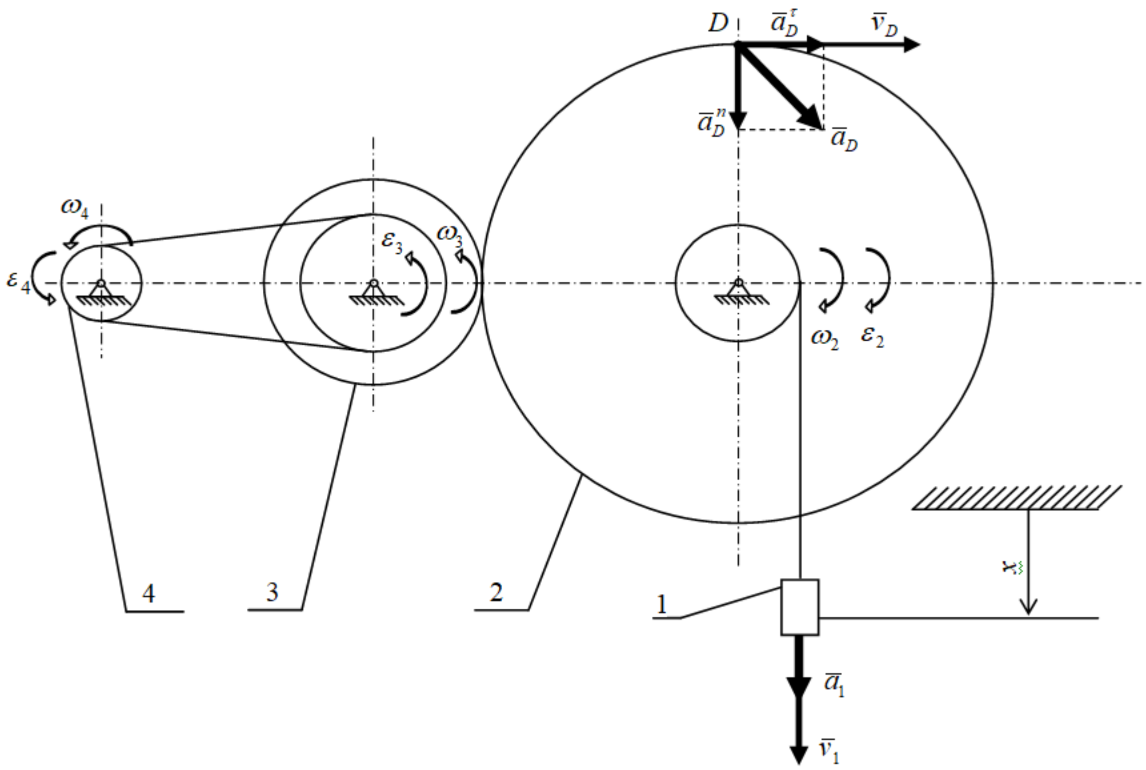


Рисунок 8 к примеру решения задачи 4

Определить коэффициенты A, B и C уравнения движения груза; найти скорость и ускорение груза; угловые скорости и ускорения всех звеньев механизма; скорость и ускорение точки D механизма в момент времени $t_1 = 2c$.

Подставив в уравнение движения груза начальные значения $t = 0$ и $x = x_0 = 8см$, получим: $C = 8см.$

Скорость движения груза $V = \dot{x} = 2At + B$.

Подставив начальные значения, определим $B = 5\,{}^{см}\!/_{c}$.

Подставив в уравнение движения груза значения $t_2 = 3c$ и $x_2 = 347$, получим $A = 36\,{}^{см}\!/_{c^2}$.

Окончательно уравнение движения груза имеет вид:

$$x = 36t^2 + 5t + 8.$$

Скорость груза $V = 72t + 5.$ При $t_1 = 2c$ $V_1 = 72 \cdot 2 + 5 = 149\,{}^{см}\!/_{c}$.

Ускорение груза найдём как производную скорости груза по времени

$$a = \dot{V} = 72\,{}^{см}\!/_{c^2} .$$

Так как по условию задачи координата x груза увеличивается, груз движется вниз. Скорость и ускорение груза имеют положительные знаки, следовательно, направлены в сторону положительного движения груза (вниз), что показано на схеме.

Угловую скорость колеса 2 найдём через линейную скорость каната

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{72t + 5}{20} .$$

При t_1=2 c $\omega_2 = 7{,}45\,{}^{рад}\!/_{c}$

Направление ω_2 определяем по направлению движения каната (см. схему на рис. 4.2).

Угловую скорость колеса 3 определим по линейной скорости точки контакта колёс 2 и 3; направление вращения легко найти по схеме (рис. 4.2).

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{(72t + 5) \cdot 45}{20 \cdot 40} .$$

При t_1=2 c $\omega_3 = 8{,}38\,{}^{рад}\!/_{c}$.

Угловую скорость колеса 4 найдём через линейную скорость ремня

$$\omega_4 = \frac{\omega_3 \cdot r_3}{R_4} = \frac{(72 \cdot t + 5) \cdot 45}{20 \cdot 40} \cdot \frac{15}{5} .$$

При $t_1=2$ с $\omega_4 ==25{,}14\ рад/с$

Угловые ускорения звеньев механизма определим как производные угловых скоростей по времени

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{72}{20} = 3{,}6\ рад/с^2,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{72\cdot 45}{20\cdot 40} = 4{,}05\ рад/с^2,$$

$$\varepsilon_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{72\cdot 45\cdot 15}{20\cdot 40\cdot 5} = 12{,}15\ рад/с^2.$$

Направления ω и ε совпадают, так как имеют одинаковые знаки.

Точка D находится на колесе 2, на расстоянии $R_2 = 45 см$ от оси вращения. В указанный момент времени точка D имеет скорость:

$$V_D = \omega_2 \cdot R_2 = 7{,}45\cdot 45 = 335{,}25\ см/с.$$

Направление $\overline{V}_D$ определяется направлением ω_2.

Нормальное ускорение точки D направлено к оси вращения.

$$a_D^n = \omega_2^2 \cdot R_2 = 7{,}45^2\cdot 45 = 2497{,}6\ см/с^2.$$

Тангенциальное (касательное) ускорение точки D направлено по вектору $\overline{V}_D$, так как направление углового ускорения ε_2 совпадает по направлению с угловой скоростью ω_2 .

$$a_D^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = 3{,}6\cdot 45 = 162\ см/с^2.$$

Полное ускорение точки D

$$a = \sqrt{(a_D^n)^2 + (a_D^\tau)^2} = \sqrt{2497{,}6^2 + 162^2} = 2502{,}85\ см/с^2.$$

Направление полного ускорения точки D указано на схеме (Рис. 8).

6. Методические указания к решению задачи 5

Энергетической характеристикой действия силы на движение материальной точки (тела, механической системы) является работа. Работой называется скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения.

Работа постоянной силы на конечном прямолинейном перемещении определяется произведением модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между их направлениями:

$$A = F\cdot S\cdot \cos\alpha.$$

Работа силы тяжести не зависит от траектории тела, а зависит лишь от изменения высоты его положения:

$$A = mgh$$

При постоянном моменте его работа на конечном значении угла поворота тела равна $$A = M\varphi .$$

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} .$$

Она характеризует способность движущейся точки (тела) передавать свое движение другим точкам (телам) как в виде механического движения, так и в других видах энергии.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в интегральной форме согласно которой **изменение кинетической энергии материальной точки равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил,** имеет вид:

$$\frac{m\upsilon_1{}^2}{2} - \frac{m\upsilon_0{}^2}{2} = \sum A_k .$$

Кинетической энергией механической системы называется арифметическая сумма кинетических энергий всех ее точек (тел).

В случае вращательного движения тела относительно неподвижной оси его кинетическая энергия определяется по формуле

$$T = \frac{J_z\omega^2}{2} ,$$

где ω-угловая скорость вращения тела,

J_z -момент инерции тела относительно оси вращения.

Для пустотелого цилиндра (тонкостенной оболочки) радиуса R $J_z = mR^2$,

для однородного сплошного цилиндра или диска $J_z = \frac{mR^2}{2}$,

для однородного стержня длиной l $J_z = \frac{ml^2}{12}$.

Приведенные формулы справедливы для тех случаев, когда ось вращения совпадает с центральной осью тела (проходит через его центр масс).

В общем случае движения механической системы или тела кинетическая энергия, согласно теореме Кенига, складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс С и кинетической энергии вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс:

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{m\upsilon_C}^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{J_C\omega^2}}{\boldsymbol{2}}.$$

Равенство $\boldsymbol{T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i}$ выражает теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральной форме, согласно которой **изменение кинетической энергии механической системы при ее некотором перемещении равно алгебраической сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.**

Для неизменяемой системы (в которой расстояние между каждыми двумя взаимодействующими точками или телами остается постоянным во время движения) с идеальными связями сумма работ внутренних сил равна нулю и уравнение принимает вид $\boldsymbol{T_1 - T_0 = \sum A_k^e}$.

Задание 5. Механическая система (рис. 9) приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Учитывая трение скольжения тела ***1*** и пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела ***1*** в тот момент, когда его перемещение станет равным $\boldsymbol{S_1}$. В задании приняты следующие обозначения: $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$, $\boldsymbol{m_3}$, $\boldsymbol{m_4}$ –массы соответствующих тел; $\boldsymbol{R_2}$, $\boldsymbol{R_3}$-радиусы окружностей соответствующих шкивов (блоков, катков); $\boldsymbol{\alpha}$ -угол наклона плоскости к горизонту; $\boldsymbol{f}$ - коэффициент трения скольжения; блоки и катки считать однородными сплошными цилиндрами.

Необходимые для решения данные выбрать из таблицы 5 в соответствии с номером шифра. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать однородными сплошными цилиндрами. Наклонные участки нити параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Таблица 5 - Исходные данные к заданию 5

Номер строки	m_1 *кг*	m_2 *кг*	m_3 *кг*	m_4 *кг*	R_2, *см*	R_3, *см*	*α, град*	*f*	S_1, *м*
0	4	2	3	5	20	40	15	0,1	0,5
1	5	3	6	8	40	30	20	0,2	0,8
2	10	8	4	6	30	50	30	0,3	0,4
3	6	4	8	5	15	25	15	0,4	0,2
4	3	5	6	4	25	40	20	0,1	1,0
5	2	8	4	6	50	30	30	0,2	0,5
6	8	6	10	5	40	25	15	0,3	0,8
7	5	4	8	6	30	20	20	0,4	0,4
8	4	5	2	3	20	30	30	0,1	0,2
9	8	2	6	4	25	40	15	0,2	1,0

Номер схемы на рисунке 9 выбрать в соответствии с предпоследней цифрой шифра (для вариантов 01-10 схема 1, для вариантов 11-20 схема 2 для вариантов 21-30 схема 3 для вариантов 31 и далее схема 4). Данные для расчёта выбрать из строки таблицы 5, соответствующей последней цифре шифра.

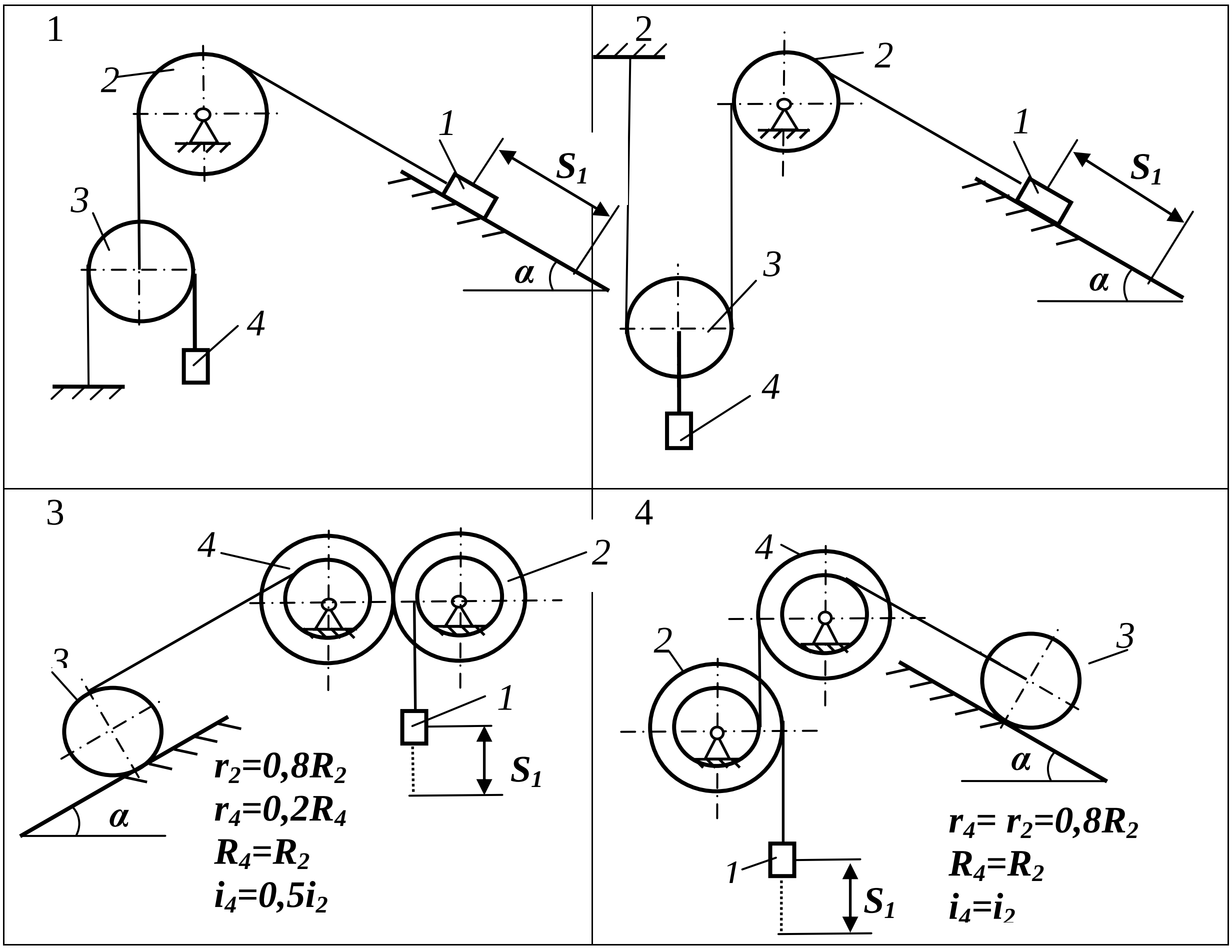


Рисунок 9. Схемы к заданию 5

Пример выполнения задания 5

Механическая система (рис. 10) состоит из сплошного однородного цилиндрического катка 4, невесомого блока 5, подвижного блока 3, ступенчатого шкива 2 и груза 1. Тела системы соединены нерастяжимыми невесомыми нитями, намотанными на шкив 2. Система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Определить скорость груза 1 в тот момент, когда его перемещение станет равным S_1.

Исходные данные: $m_1=8$ *кг*; $m_2=4$ *кг*; $m_3=6$ *кг*; $m_4=10$*кг*; $R_2=0{,}3$ *м*; $r_2=0{,}1$ *м*; $i_2=0{,}2$ *м*; $R_3=0{,}1$ *м*; $\alpha=60^0$; $f=0{,}1$; $k=0{,}1$ *см*; $S_1=0{,}2$*м*.

Для определения скорости груза 1 воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии для неизменяемой механической системы с идеальными связями:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Так как в начальный момент времени система находилась в покое, ее кинетическая энергия $T_0=0$. В произвольный момент времени величина T равна арифметической сумме кинетических энергий всех тел системы, имеющих массу: $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.

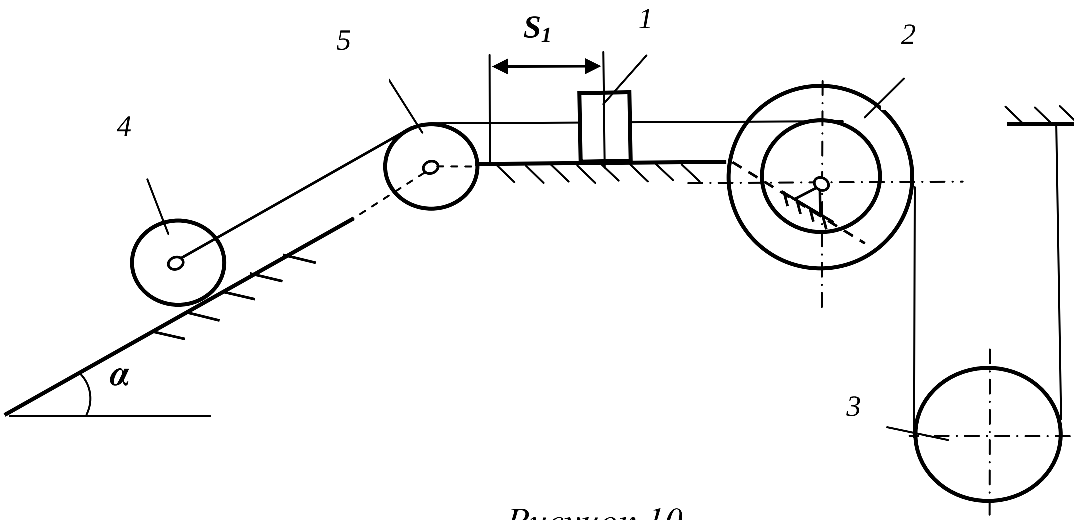


Рисунок 10

Учитывая, что тело 1 движется поступательно, тело 2 вращается вокруг неподвижной оси, а тела 3 и 4 совершают плоскопараллельные движения, получим

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2; \quad T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2; \quad T_3 = \frac{1}{2} m_3 \upsilon_{C3}^2 + \frac{1}{2} J_{C3} \omega_3^2;$$

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \upsilon_{C4}^2 + \frac{1}{2} J_{C4} \omega_4^2.$$

Все входящие сюда скорости необходимо выразить через искомую величину υ_1.

Угловая скорость вращения шкива 2 определяется через линейную скорость нити, совпадающую с υ_1:

$\omega_2 = \frac{\upsilon_1}{r_2}$, а его момент инерции $J_2 = m_2 i_2^2$.

Тогда кинетическая энергия этого шкива

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \upsilon_1^2 \frac{i_2^2}{r_2^2}.$$

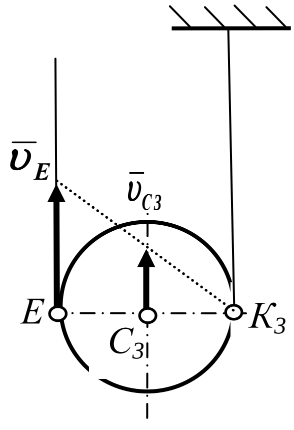


Рисунок 11

Для определения угловой скорости подвижного блока 3 заметим, что точка K_3 является мгновенным центром скоростей, и скорость центра масс C_3 блока вдвое меньше скорости нити υ_E (рис. 11), величина которой $\upsilon_E = \omega_2 R_2 = \upsilon_1 \frac{R_2}{r_2}$.

Угловая скорость поворота блока 3 $\omega_3 = \frac{\upsilon_E}{2R_3} = \upsilon_1 \frac{R_2}{2r_2R_3}$,

а его момент инерции как однородного сплошного цилиндра

$$J_{C3} = \frac{m_3R_3^2}{2}.$$

Окончательно кинетическая энергия блока 3 равна:

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3\frac{1}{2}\upsilon_1^2\frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_3R_3^2}{2}\cdot\upsilon_1^2\frac{R_2^2}{4r_2^2R_3^2} = \frac{5}{16}m_3\upsilon_1^2\frac{R_2^2}{r_2^2}.$$

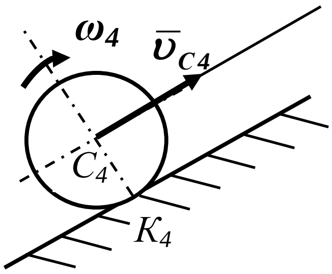


Рисунок 12

Величина скорости центра масс катка 4 C_4 равна скорости груза 1, а его угловая скорость $\omega_4 = \frac{\upsilon_1}{R_4}$, так как точка K_4 –мгновенный центр скоростей (рис.12). При этом момент инерции катка 4 относительно оси, проходящей через его центр масс, определим как для однородного сплошного цилиндра по формуле $J_{C4} = \frac{m_4R_4^2}{2}$.

Кинетическая энергия катка 4 равна

$$T_4 = \frac{1}{2}m_4\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_4R_4^2}{2}\cdot\frac{\upsilon_1^2}{R_4^2} = \frac{3}{4}m_4\upsilon_1^2.$$

Окончательно кинетическая энергия механической системы выражается равенством:

$$T = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_1^2\frac{i_2^2}{r_2^2} + \frac{5}{16}m_3\upsilon_1^2 + \frac{3}{4}m_4\upsilon_1^2 =$$

$$= \upsilon_1^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{2}\cdot\frac{i_2^2}{r_2^2} + \frac{5}{16}m_3 + \frac{3}{4}m_4\right).$$

Определим сумму работ всех действующих внешних сил на том перемещении, которое будет иметь система, когда тело 1 пройдет путь S_1. Изобразим на схеме внешние силы, действующие на тела, входящие в механическую систему (рис.13): активные силы G_1, G_2, G_3, G_4, реакции связей N_1, N_2, N_4, N_5, T, силы трения $F_{тр.1}$, и $F_{тр.4}$, и момент трения $M_{тр.}$(сопротивление перекатыванию тела 4 по поверхности). При определении направления сил трения и момента трения предположим, что тело 1 движется вправо.

Выразим перемещения точек приложения сил через S_1, учитывая при этом, что соотношения между перемещениями такие же, как и между скоростями.

$$S_{C4} = S_1; \quad \varphi_4 = \frac{S_1}{R_4}; \quad \varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \quad S_E = \varphi_2 R_2 = S_1 \frac{R_2}{r_2}; \quad S_{C3} = \frac{S_E}{2} = S_1 \frac{R_2}{2r_2}.$$

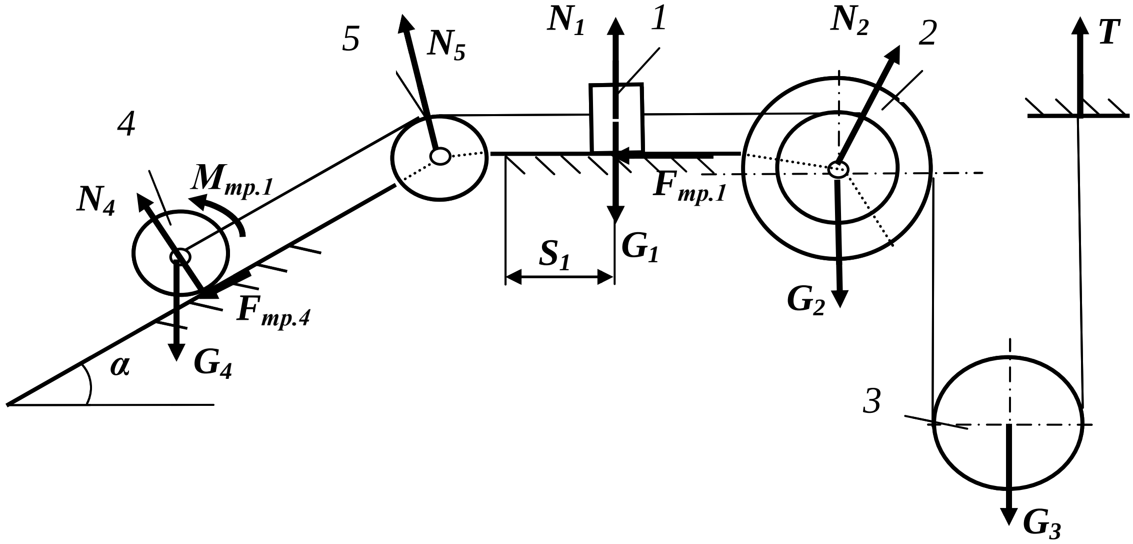


Рисунок 13

Выразим перемещения точек приложения сил через S_1, учитывая при этом, что соотношения между перемещениями такие же, как и между скоростями.

$$S_{C4} = S_1; \quad \varphi_4 = \frac{S_1}{R_4}; \quad \varphi_2 = \frac{S_1}{r_2}; \quad S_E = \varphi_2 R_2 = S_1 \frac{R_2}{r_2}; \quad S_{C3} = \frac{S_E}{2} = S_1 \frac{R_2}{2r_2}.$$

Отметим, что реакции связей N_1, N_2, N_4, N_5, T , сила трения $F_{тр.4}$, силы тяжести G_1, G_2 работ не производят, так как они либо перпендикулярны направлению перемещения точки приложения, либо перемещение этой точки равно нулю. Работы остальных сил равны

$$A(F_{ТР}) = -F_{ТР} \cdot S_1 = -fN_1S_1 = -fm_1gS_1;$$

$$A(G_4) = G_4 S_{C4} \cos(90^0 - \alpha) = m_4 g S_1 \sin\alpha;$$

$$A(M_{ТР}) = -M_{ТР}\varphi_4 = -kN_4 \frac{S_1}{R_4} = -km_4 g\cos\alpha \frac{S_1}{R_4};$$

$$A(G_3) = -G_3 S_{C3} = -m_3 g S_1 \frac{R_2}{2r_2}.$$

Сумма работ внешних сил равна

$$\sum A_к^e = m_4 g S_1 \sin\alpha - fm_1 g S_1 - km_4 g\cos\alpha \frac{S_1}{R_4} - m_3 g S_1 \frac{R_2}{2r_2} =$$

$$= gS_1\left(m_4 \sin\alpha - fm_1 - \frac{km_4\cos\alpha}{R_4} - \frac{m_3 R_2}{2r_2}\right).$$

Подставляя выражения, определим величину искомой скорости: υ_1= 1,47 м/с.

Литература

1. Прикладная механика: учеб. пособие / В.Т. Батиенков, В.А. Волосухин, С.И. Евтушенко [и др.]. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2019. – 2-е изд., доп. и пере-раб. — 339 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Текст: электронный: URL: http://www.znanium.com]. – (Высшее образование). *(ЭБС ИНФРА-М)*

2. Механика: учебное пособие для вузов / В.Т. Батиенков, В.А. Волосухин, С.И. Евтушенко, В.А. Лепихова. – М.: ИЦ РИОР: ИНФРА-М, 2011. – 512 с.: 60х90 1/16. – (Высшее образование). (переплет) ISBN 978-5-369-00757-0 – Текст: электронный: URL: http://znanium.com/catalog/product/219285 *(ЭБС ИНФРА-М)*

3. Молотников, В.Я. Техническая механика: учебное пособие / В.Я. Молотников. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 476 с. – ISBN 978-5-8114-2403-0. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/91295 *(ЭБС Лань)*

4. Теория механизмов и машин: учебное пособие / Белов М.И., Сорокин С.В., – 2-е изд. – М.:ИЦ РИОР, НИЦ ИНФРА-М, 2018. – 322 с.: 60х90 1/16 (Переплёт) ISBN 978-5-369-01742-5 – Текст: электронный: URL: http://znanium.com/ catalog/ product/945036 *(ЭБС ИНФРА-М)*

5. Куликов, Ю.А. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие / Ю.А. Куликов. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 272 с. – ISBN 978-5-8114-2449-8. – Текст: электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. – URL: https://e.lanbook.com/book/91882. – Режим доступа: для авториз. пользователей. *(ЭБС ЛАНЬ)*

6. Детали машин и основы конструирования: Основы расчета и проектирования соединений и передач: учеб. пособие / В.А. Жуков. – 2-е изд. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 416 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – www.dx.doi.org/ 10.12737/7597. – Режим доступа: http://znanium.com/ catalog/ product/989484. *(ЭБС ИНФРА-М)*

7. Прикладная механика: в 2 ч. Часть 1. Основы расчета, проектирования и моделирования механизмов: учебник / А.Н. Соболев, А.Я. Некрасов, А.Г. Схиртладзе, Ю.И. Бровкина. – М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. – 224 с. – Текст: электронный: URL: http://znanium.com/catalog/product/550577 *(ЭБС ИНФРА-М)*

8. Прикладная механика: учебник: в 2 ч. Часть 2. Основы структурного, кинематического и динамического анализа механизмов: учеб. пособие / А.Н. Соболев, А.Я. Некрасов, Ю.И. Бровкина. – М.: КУРС: НИЦ ИНФРА-М, 2017. – 160 с. – (Бакалавриат). – Текст: электронный: URL: http://znanium.com/catalog/ product/550572 *(ЭБС ИНФРА-М)*

Оглавление

Составители: Булгаков Сергей Алексеевич
Пшенов Евгений Александрович
Тихонкин Игорь Васильевич

МЕХАНИКА

задания и методические указания для практических занятий,
самостоятельной и контрольной работы

Ч.1 Теоретическая механика

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка И.В. Тихонкин

Подписано в печать 29 сентября 2021 г.
Формат 84×108/32. Объем 1,6 уч.-изд. л
Тираж 50 экз. Изд. № . Заказ №

Отпечатано в мини-типографии Инженерного института
630039, г. Новосибирск, ул. Никитина, 147