ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольных работ №№3,4

23.03.03 *Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов*
профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство

Новосибирск 2021

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№3,4 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, С.Н.Бурков, М.В.Грунина, И.В. Марчук – Новосибирск, 2021. – 30 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлению подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (профиль: Автомобили и автомобильное хозяйство).

Утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом Инженерного института (протокол №4 от 30 ноября 2021)
Ответственный за выпуск куратор по инженерным направлениям подготовки Е.В.Агафонова.

Содержание

1. Введение 4

2. Методические указания по выполнению контрольных работ 5

3. Контрольная работа №3 7

4. Контрольная работа №4 9

5. Примеры решения задач контрольных работ 15

6. Вопросы к экзамену 27

7. Литература 29

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое мышление,

– познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Требования к результатам освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики;

– основные понятия и методы математического анализа;

– дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ варианта	Номера задач контрольных работ по вариантам									
	Контрольная работа №5					Контрольная работа №6				
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

3. Контрольная работа №3

В задачах **1–10** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

1. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

2. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

3. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

4. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$.

5. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

6. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

7. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

8. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

9. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$.

10. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

В задачах **11-20** найти неопределённые интегралы с помощью формулы интегрирования по частям.

11. $\int(3-x)\cos x dx$.

12. $\int x\ln(1-3x)dx$.

13. $\int xe^{-7x}dx$.

14. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$.

15. $\int\sqrt{x^3}\ln x dx$.

16. $\int x\sin 5x dx$.

17. $\int(2x+5)\sin x dx$.

18. $\int\dfrac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$.

19. $\int\arcsin\dfrac{x}{3}dx$.

20. $\int xe^{3x}dx$.

В задачах **21-30** вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

21. $\begin{cases} y = x^2 + 6x - 5 \\ y = 8x - 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} y = x^2 + x - 5 \\ y = x - 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y = -x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 6 \end{cases}$

24. $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 2 - x \end{cases}$

27. $\begin{cases} y = 2x - x^2 + 3 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y = -x^2 + x + 3 \\ y = -x \end{cases}$

29. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$

30. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 5x - 11 \end{cases}$

В задачах **31-40** найти решение задачи Коши.

31. $y' - y\cos x = xe^{\sin x}; \quad y(0) = 1.$

32. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2; \quad y(0) = 0.$

33. $y' - 2y = x^2 e^{2x}; \quad y(0) = \dfrac{1}{3}.$

34. $y' + y\sin x = e^{\cos x}; \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}.$

35. $y' - \dfrac{y}{x} = 1; \quad y(1) = 5.$

36. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2; \quad y(1) = \dfrac{5}{4}.$

37. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{x}; \quad y(1) = 3.$

38. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2}; \quad y(1) = 1.$

39. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{1}{x^2}; \quad y(1) = \dfrac{3}{2}.$

40. $y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2}$; $y(-1) = 1$.

В задачах **41-50** найти общее решение дифференциального уравнения.

41. $y'' - 2y' = 6x^2 - 6x - 2$.

42. $y'' - y' - 6y = 5e^{3x}$.

43. $y'' + 2y' - 8y = 3\sin x$.

44. $y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2$.

45. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

46. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x - 3$.

47. $y'' - 2y' + y = 2e^{-2x}$.

48. $y'' + 14y' + 49y = 6e^{-7x}$.

49. $y'' + y' - 12y = 14e^{3x}$.

50. $y'' + 16y = 7\cos 2x$.

4. Контрольная работа №4

В задачах **51-60** дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{b^n \sqrt[k]{n}}$. Написать первые четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и выяснить вопрос о сходимости ряда на концах интервала. Числа *a*, *b* и *k* даны.

51. $a = 2, \quad b = 3, \quad k = 4$.

52. $a = 6, \quad b = 5, \quad k = 3$.

53. $a = 3, \quad b = 4, \quad k = 5$.

54. $a = 5, \quad b = 2, \quad k = 4$.

55. $a = 4, \quad b = 3, \quad k = 3$.

56. $a = 2, \quad b = 3, \quad k = 5$.

57. $a = 5, \quad b = 6, \quad k = 2$.

58. $a = 3, \quad b = 5, \quad k = 6$.

59. $a = 3, \quad b = 7, \quad k = 3$.

60. $a = 2, \quad b = 7, \quad k = 3$.

61. В коробке 15 луковиц гладиолусов, из которых 7 луковиц красных гладиолусов, 8 луковиц черных. Какова вероятность того, что из 10 наудачу выбранных луковиц 6 окажутся луковицами черных гладиолусов?

62. Из 12 луковиц, среди которых 5 луковиц красных тюльпанов и 7 желтых, наудачу выбирают 4. Какова вероятность того, что из них вырастут два красных и два желтых тюльпана?

63. В помете 2 рыжих щенка и 5 черных. Наудачу выбирают трех щенков. Какова вероятность того, что один из них рыжий?

64. Из 12 крыс 8 получили некоторую дозу облучения. Какова вероятность того, что из 6 наудачу выбранных крыс 4 облучены?

65. В популяции из 30 плодовых мушек 10 имеют красные глаза. Наудачу выбирают 5 мушек. Какова вероятность того, что одна из них имеет красные глаза?

66. В 15 пакетиках находится пыльца, собранная с 15 цветков гороха, из которых 5 красных, а остальные – белые. Наудачу выбирают 3 пакетика. Какова вероятность того, что в двух из них пыльца красных цветков?

67. Среди 12 цыплят 5 курочек. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 4 цыплят 2 курочки?

68. Из данных 20 мужчин 1 страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что при случайном выборе 10 мужчин из этих 20 один страдает дальтонизмом?

69. Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что 3 из них красные?

70. Из 15 вакцинированных мышей у 12 сформировался иммунитет. Какова вероятность того, что из 5 случайно выбранных из группы вакцинированных мышей 4 имеют иммунитет?

В задачах **71-80** задан закон распределения дискретной случайной величины .

Найти:

1) значение параметра a;

2) математическое ожидание $M(X)$;

3) дисперсию $D(X)$.

Построить многоугольник распределения.

71.

X	25	27	28	30	31
p	0,3	0,2	0,3	0,1	a

72.

23	24	26	27	X	30
a	0,2	0,4	0,3	p	0,1

73.

X	17	18	20	23	24
p	0,2	0,1	0,5	0,1	a

74.

X	12	14	16	19	20
p	0,1	0,4	a	0,3	0,1

75.

X	32	34	35	36	38
p	0,1	0,2	0,5	0,1	a

76.

X	35	36	38	40	42
p	0,1	0,4	0,2	0,1	a

77.

X	40	41	43	45	46
p	0,2	0,4	a	0,3	0,1

78.

X	51	52	54	55	57
p	0,2	0,3	0,1	0,3	a

79.

X	46	49	50	51	55
p	0,2	0,3	a	0,3	0,1

80.

X	18	19	20	21	23
p	0,3	0,3	a	0,1	0,2

В задачах **81-90** случайная величина X задана функцией распределения. Требуется:

1) найти функцию плотности вероятности $f(x)$;

2) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

3) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

81. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ x, & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & при \quad x > 1. \end{cases}$

82. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 2, \\ \frac{1}{2}x-1, & при \quad 2 < x \le 4, \\ 1, & при \quad x > 4. \end{cases}$

83. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -1, \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & при \quad -1 < x \le 2, \\ 1, & при \quad x > 2. \end{cases}$

84. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{4}x, & при \quad 0 < x \le 4, \\ 1, & при \quad x > 4. \end{cases}$

85. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 1, \\ x-1, & при \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & при \quad x > 2. \end{cases}$

86. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 4, \\ \frac{1}{2}x-2, & при \quad 4 < x \le 6, \\ 1, & при \quad x > 6. \end{cases}$

87. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 2, \\ x-2, & при \quad 2 < x \le 3, \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$

88. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -1, \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & при \quad -1 < x \le 3, \\ 1, & при \quad x > 3. \end{cases}$

89. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le 1/2, \\ 2x-1, & при \quad 1/2 < x \le 1, \\ 1, & при \quad x > 1. \end{cases}$

90. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x \le -1, \\ x+1, & при \quad -1 < x \le 0, \\ 1, & при \quad x > 0. \end{cases}$

В задачах **91–100** закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей. Найти:

1) частные законы распределения случайных величин X и Y;

2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

4) корреляционный момент C_{xy};

5) коэффициент корреляции r_{xy};

6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

91.

$Y \backslash X$	1	2	3
–1	0,1	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1
1	0,2	0,1	0

92.

$Y \backslash X$	2	3	4
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,2
1	0,1	0	0

93.

$Y \backslash X$	–3	0	1

94.

$Y \backslash X$	–3	–2	0

–1	0	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

1	0,1	0,2	0,2
2	0,1	0,1	0,1
3	0	0	0,2

95.

Y \ *X*	0	2	3
–2	0,1	0,1	0
1	0,2	0,2	0,1
0	0,1	0,1	0,1

96.

Y \ *X*	–3	0	2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1

97.

Y \ *X*	–3	2	4
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,
1	0,2	0,2	0

98.

Y \ *X*	0	3	4
–2	0,2	0,1	0
–1	0,2	0,1	0,1
0	0,1	0,1	0,1

99.

Y \ *X*	–1	0	2
–1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

100.

Y \ *X*	0	2	4
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0,1	0,1	0

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Исследовать данную функцию методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

$$y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$$

Решение. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$

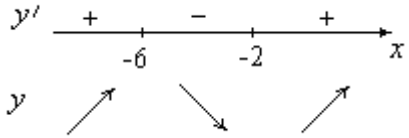
1) Область определения: $x \in (-\infty;\infty)$

2) Функция непрерывна.

3) $y(-x) = \sqrt[3]{-x(-x+6)^2}$, чётность, нечётность, периодичность отсутствуют.

4) $y' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x+6)^{-\frac{1}{3}} = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+6}}$.

$y' = 0$ при $x = -2$, y' не существует при $x = 0$ и $x = -6$. Применяя метод интервалов, определяем интервалы монотонности функции.

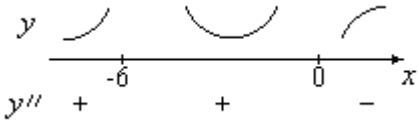


Итак, функция возрастает при $x \in (-\infty;-6) \cup (-2;\infty)$ и убывает при $x \in (-6;-2)$.

$y(-6) = 0$ – точка максимума, $y(-2) = -2\sqrt[3]{4}$ – точка минимума.

5) $y'' = \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+6}} \right)' = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^5}\cdot\sqrt[3]{(x+6)^4}}$.

$y'' \neq 0$, y'' не существует при $x = 0$ и $x = -6$. Методом интервалов определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.



6) Вертикальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x+6)^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x+6)^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}$$

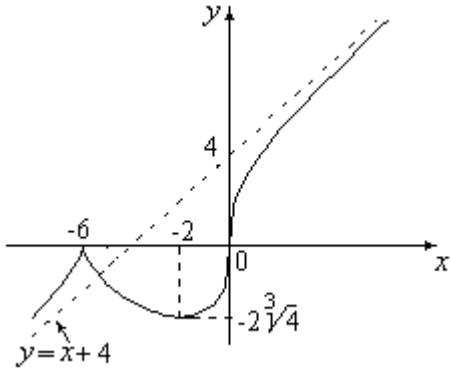
$$\left(\sqrt[3]{x^3+12x^2+36x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\sqrt[3]{1+\frac{12}{x}+\frac{36}{x^2}} - 1\right)\right).$$

Применим теперь эквивалентность $(1+t)^{\alpha} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \alpha t$. В нашем случае $\alpha = \frac{1}{3}$, $t = t = \frac{12}{x} + \frac{36}{x^2}$. Поэтому $b = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{12}{x}+\frac{36}{x^2}\right)\right) = 4.$

т.е. есть наклонная асимптота $y = x + 4$.

7) на основании полученных результатов строим график функции



Пример 2. Найти неопределённые интеграл с помощью формулы интегрирования по частям. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$\int \ln(x^2+1)dx.$

Решение.

в) $\int \ln(x^2+1)dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln(x^2+1), & du=\dfrac{2xdx}{x^2+1}, \\ dv=dx, & v=x \end{array} \right| = x\ln(x^2+1) -$

$$-\int x\cdot\frac{2xdx}{1+x^2} = x\ln(x^2+1) - 2\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \left|\frac{x^2}{1+x^2} = 1-\frac{1}{1+x^2}\right| =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = x\ln(x^2+1) - 2(x-\operatorname{arctg}x) + C.$$

Проверка:

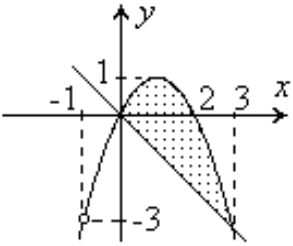
$$\left(x\ln(x^2+1) - 2(x-\operatorname{arctg}x) + C\right)' = 1\cdot\ln(x^2+1) + x\cdot\frac{2x}{1+x^2} -$$

$$-2\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{1+x^2} - \frac{2(1+x^2-1)}{1+x^2} = \ln(x^2+1).$$ Верно.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Решение. Построим фигуру, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ (точки пересечения параболы с осью Оx: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ветви параболы направлены вниз) и прямой $y = -x$.



Вычислим площадь по формуле

$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right)dx$, где график функции $y = f_2(x)$ ограничивает фигуру сверху, а график функции $y = f_1(x)$ –

снизу. Для нахождения пределов интеграла решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases} \quad 2x - x^2 = -x \ , \ 3x - x^2 = 0 \ , x=0, \ x=3.$$

$$S = \int_0^3 \left(2x - x^2 - (-x)\right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^3 = 4{,}5\,.$$

Ответ: Площадь фигуры равна 4,5.

Пример 4. Найти решение задачи Коши $xy' + y = \cos x, \ \ y(\pi) = 0.$

Решение. Разделим обе части уравнения на x: $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cos x}{x}.$

Получили линейное уравнение.

Решаем уравнение: $y' + \dfrac{y}{x} = 0.$

Разделяем переменные: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}; \ \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}.$

Интегрируем обе части: $\int \dfrac{dy}{y} = -\int \dfrac{dx}{x}; \ \ \ln|y| = -\ln|x| + C.$

Пользуясь свойствами логарифма, получаем $y = \dfrac{C_1}{x}.$ (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C = \ln C_1$). Считая C_1 функцией от x, подставляем в полученное линейное уравнение $y = \dfrac{C_1}{x}$ и $y' = \dfrac{C_1'x - C_1}{x^2}$: $\dfrac{C_1'x - C_1}{x^2} + \dfrac{C_1}{x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{\cos x}{x},$

$\dfrac{C_1'}{x} - \dfrac{C_1}{x^2} + \dfrac{C_1}{x^2} = \dfrac{\cos x}{x}.$

Отсюда находим $C_1' = \cos x, \ C_1 = \sin x + B$, где B – константа.

Используя начальные условия, найдём константу B. $0 = \dfrac{\sin\pi + B}{\pi}, \ 0 = \dfrac{0 + B}{\pi}, \ B = 0.$

Ответ: $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Пример 5. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям: $y'' - y = 4e^x$, $y(0) = 0; y'(0) = 1$

Решение. Дано ЛНДУ II порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Решение уравнения ищем в виде $y_{он} = y_{оо} + y_{чн}$

а) Найдем $y_{оо}$: $y'' - y = 0$

Его характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$; $k_1 = 1; k_2 = -1$. Значит $y_{оо} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

б) $y_{чн}$ ищем, используя метод неопределённых коэффициентов $y_{чн} = Ae^x x$, $y'_{чн} = Ae^x x + Ae^x$, $y''_{чн} = Ae^x x + 2Ae^x$.

Подставив $y_{чн}, y''_{чн}$, в исходное уравнение, получаем

$$Ae^x x + 2Ae^x - Ae^x x = 4e^x$$
$$2Ae^x = 4e^x$$
$$2A = 4 \Rightarrow A = 2$$
$$y_{чн} = 2xe^x$$
$$y_{он} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 2xe^x$$

Чтобы найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, продифференцируем $y_{он}$

$y'_{он} = C_1 e^x - C_2 e^{-x} + 2e^x + 2xe^x$ $\quad y_{оо} \quad y_{чн}$

Подставим в $y_{он}$ и $y'_{он}$ вместо x = 0, $y_{он} = 0$, $y'_{он} = 1$.

$$\begin{cases} C_1 - C_2 + 2 = 1 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \qquad C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = \frac{1}{2}$$

Подставим найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в $y_{он}$: $y = -\dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x$.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{2}e^x + \dfrac{1}{2}e^{-x} + 2xe^x$.

Пример 6. Дан степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n x^n}{7^n\sqrt[3]{n+1}}$. Написать первые четыре члена ряда, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение: $a_n=\frac{8^n}{7^n\sqrt[3]{n+1}}$, $x_0=0$.

Найдём радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^n}{7^n\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{7^{n+1}\sqrt[3]{n+2}}{8^{n+1}}=\frac{7}{8}$$

Интервал сходимости: $\left(x_0-R;\,x_0+R\right)=\left(-\frac{7}{8};\frac{7}{8}\right)$

Рассмотрим концы интервала:

при $x=\frac{7}{8}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\left(\frac{7}{8}\right)^n}{7^n\sqrt[3]{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{1}{3}<1$, следовательно, (по признаку сравнения) ряд расходится.

при $x=-\frac{7}{8}$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n\left(-\frac{7}{8}\right)^n}{7^n\sqrt[3]{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$, это знакочередующийся ряд. Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=0$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$, т.е. $|a_n|>|a_{n+1}|$.

Условия выполнены, значит ряд сходится.

Ответ: Ряд сходится при $x\in\left[-\frac{7}{8};\frac{7}{8}\right)$.

Пример 7. В группе 18 студентов из которых, из которых 8 имеют задолженность по математическому анализу. Какова вероятность того, что из 10 произвольно выбранных студентов 3 человек

имеют задолженность?

Решение. Такие задачи описываются общей схемой. Имеется совокупность из N_1 элементов первого вида и N_2 элементов второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности из k элементов она состоит из k_1 элементов первого вида и k_2 элементов второго вида, где $k = k_1 + k_2$, $k_1 \le N_1$, $k_2 \le N_2$.

$$P(A) = \frac{C_{N_1}^{k_1} \cdot C_{N_2}^{k_2}}{C_{N_1+N_2}^{k_1+k_2}}.$$

$$p = \frac{C_8^3 C_{10}^5}{C_{18}^{10}} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{10!}{5!5!} \cdot \frac{10!8!}{18!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot$$

$$\cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{784}{2431} \approx 0,3225.$$

Пример 8. Задан закон распределения дискретной случайной величины. Найти:

1) значение параметра a;
2) математическое ожидание $M(X)$;
3) дисперсию $D(X)$.

Построить многоугольник распределения.

X	3	6	8	14	31
p	0,2	0,1	0,3	0,2	a

Решение.

1) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$

$0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,2 + a = 1,$

$a = 0,2.$

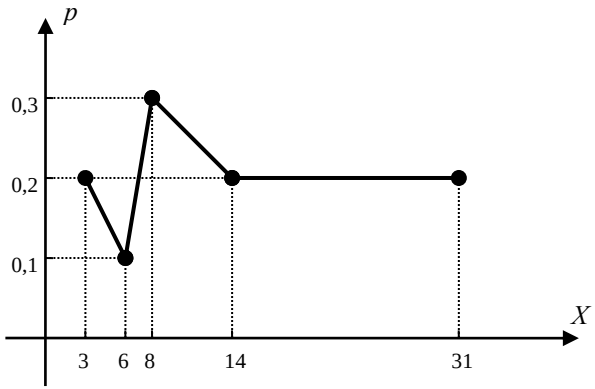
2) $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 = 3 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 +$

$+14 \cdot 0,2 + 31 \cdot 0,2 = 0,6 + 0,6 + 2,4 + 2,8 + 6,2 = 12,6.$

3) $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 3^2 \cdot 0,2 + 6^2 \cdot 0,1 + 8^2 \cdot 0,3 + 14^2 \cdot 0,2 +$

$+31^2 \cdot 0,2 - 12,6^2 = 97,24.$

4) многоугольник распределения:



Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{3}, & 0 < x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти функцию плотности вероятности *f(x)*;

2) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*;

3) построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

Решение:

1) $f(x) = F'(x)$, $0' = 1' = 0$, $\left(\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{3}\right)' = \dfrac{2x}{12} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x+2}{6}$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \dfrac{1}{6}(x+2), & 0 < x < 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases}$$

2) Найдём $M(X)$ по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

$$M(X)=\frac{1}{6}\int\limits_0^2 x(x+2)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\frac{10}{9}.$$

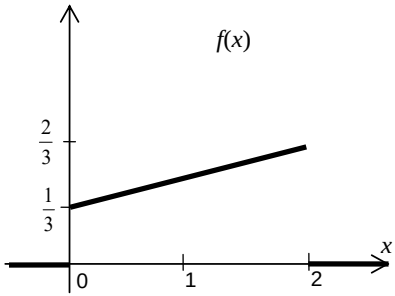
Дисперсию вычисляем по формуле

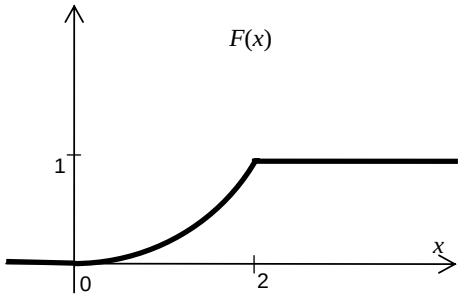
$$D(X)=M(X^2)-M^2(X);$$

$$M(X^2)=\frac{1}{6}\int\limits_0^2 x^2(x+2)dx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{14}{9};$$

$$D(X)=\frac{14}{9}-\left(\frac{10}{9}\right)^2=\frac{26}{81}.$$

3) Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$.





Пример 10. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Найти:

1) частные законы распределения случайных величин X и Y;
2) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
3) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
4) корреляционный момент C_{xy};
5) коэффициент корреляции r_{xy};
6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

Решение:

1) частный закон распределения случайной величины X:

$$P(X=1)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2)=\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}.$$

проверка: $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1,$ верно.

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

частный закон распределения случайной величины Y:

$$P(Y=1)=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P(Y=2)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P(Y=3)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

проверка: $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1,$ верно.

y_i	1	2	3
p_i	1/3	1/2	1/6

2) Математические ожидания случайных величин X и Y:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3};\ \ M(Y)=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{6}.$$

3) Дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$:

$$D(X)=1^2\cdot\frac{1}{6}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{5}{9},$$

$$D(Y)=1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{2}+3^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{11}{6}\right)^2=\frac{17}{36}.$$

4) Корреляционный момент C_{xy}:

$$C_{xy}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y),$$

$$M(XY)=1\cdot1\cdot\frac{1}{18}+1\cdot2\cdot\frac{1}{12}+1\cdot3\cdot\frac{1}{36}+2\cdot1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot3\cdot\frac{1}{18}+$$

$$+3\cdot1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot3\cdot\frac{1}{12}=\frac{77}{18},$$

$$C_{xy}=\frac{77}{18}-\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{6}=0.$$

5) коэффициент корреляции $r_{xy}=\frac{C_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$, где $\sigma_x=\sqrt{M(X)}$,

$\sigma_y=\sqrt{M(Y)}$ – среднеквадратические отклонения.

Так как у нас $C_{xy}=0,$ то и $r_{xy}=0.$

6) условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y принимает своё наименьшее значение.

Наименьшее значение $Y=1$, при этом $P(Y=1)=\frac{1}{3}$.

По формуле $P(X=x_i \mid Y=1)=\frac{P(X=x_i;Y=1)}{P(Y=1)}$ находим:

$$P(X=1 \mid Y=1)=\frac{1}{18}:\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$P(X=2 \mid Y=1)=\frac{1}{9}:\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3 \mid Y=1)=\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Условный закон распределения

$x_i \mid Y=1$	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

6. Вопросы к экзамену

1. Теоремы о первообразных. Свойства неопределённого интеграла.
2. Интегрирование по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей.
4. Интегрирование тригонометрических функций.
5. Верхняя и нижняя интегральная сумма. Их свойства.
6. Свойства определённого интеграла.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Правила вычисления определённых интегралов.
9. Геометрические приложения определённых интегралов.
10. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные и приводящиеся к ним, линейные, Бернулли.
11. Уравнения, допускающие понижение порядка.
12. Определитель Вронского. Свойства линейных однородных уравнений.
13. Структура общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
14. Неоднородное линейное уравнение второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
15. Частное решение неоднородного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
16. Ряды. Свойства рядов. Необходимый признак сходимости.
17. Расходимость гармонического ряда.
18. Признаки Даламбера, Коши, сравнения, интегральный признак Коши.
19. Признак Лейбница.
20. Свойства абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов.
21. Интегрирование и дифференцирование равномерно сходящихся рядов.
22. Классическое и геометрическое определения вероятности. Свойство вероятности.
23. Теоремы сложения и умножения.
24. Формула полной вероятности. Вероятность гипотез. Формулы Байеса
25. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

26. Теорема Муавра - Лапласа; интегральная теорема Лапласа
27. Операции над СВ.
28. Свойства M(X), D(X) .Формулы для вычисления D(X).
29. Одинаково распределенные взаимнонезависимые СВ.
30. Начальные и. центральные теоретические моменты.
31. Биномиальное распределение, распределение Пуассона их числовые характеристики.
32. Функция распределения, ее свойства.
33. Плотность распределения вероятностей, ее свойства
34. Числовые характеристики непрерывных СВ
35. Равномерное, нормальное, показательное распределения, их числовые характеристики.
36. Кривая Гаусса.
37. Неравенство Чебышева, теорема Чебышева, теорема Бернулли.

7.1. Список основной литературы

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник / В.С. Шипачев. — Москва: ИНФРА-М, 2021. — 479 с. — (Высшее образование). — DOI 10.12737/5394. - ISBN 978-5-16-010072-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1185673 (дата обращения: 17.06.2021). – Режим доступа: по подписке.
2. Ячменев, Л. Т. Высшая математика: учебник / Л. Т. Ячменёв. - Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. - 752 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-369-01032-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1056564 (дата обращения: 17.06.2021). – Режим доступа: по подписке.

7.2. Список дополнительной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольных работ №№3,4

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Марчук Игорь Владимирович

Подписано к печати “__” _____ 2021_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,88 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160