ФГБОУ ВО НОВОСИБИРСКИЙ ГАУ

ИНСТИТУТ ЗАОЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Математика

Методические указания по самостоятельному изучению
дисциплины и выполнению контрольной работы №3
и расчётно-графической работы №1

35.03.06 *Агроинженерия*
профили:

Технические системы в агробизнесе
Технологическое оборудование для хранения и переработки с/х продукции
Технический сервис в АПК
Электрооборудование и электротехнологии в АПК

Новосибирск 2019

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №3 и РГР / Новосиб. гос. аграр. ун-т; Сост. В.Н.Бабин, Р.Т.Бильданов, С.Н.Бурков, М.В.Грунина. – Новосибирск, 2019. – 26 с.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия (профили: Машины и оборудование в агробизнесе; Технологическое оборудование для хранения и переработки с/х продукции; Технический сервис в АПК; Электрооборудование и электротехнологии в АПК).

Утверждены методической комиссией Института заочного образования и повышения квалификации.

Ответственный за выпуск куратор по инженерным направлениям подготовки Е.В.Агафонова.

Содержание

1. Введение

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания математических дисциплин в вузе для студентов инженерных специальностей – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических инженерных задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое и алгоритмическое мышление; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое мышление,

– познакомить студентов с идеями и методами высшей математики,

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой,

– привить студентам опыт решения задач с использованием математических методов.

1.2. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы (ООП)

Внешние требования к освоению дисциплины регламентируются ФГОС ВО по направлению подготовки ***35.03.06 Агроинженерия,*** профили ***Технические системы в агробизнесе, Электрооборудование и электротехнологии в агропромышленном комплексе, Технологическое оборудование для хранения и переработки сельскохозяйственной продукции, Технический сервис в агропромышленном комплексе*** *(Б1.О.11 Математика),* в части отнесения ее к базовой части блока дисциплин.

Внутренние требования определяются видами и задачами профессиональной деятельности и формируемыми компетенциями. Основной вид профессиональной деятельности: ***организационно-управленческий***.

Дисциплина Б.1.О.11 Математика относится к базовой части *математического и естественнонаучного цикла*.

Изучение дисциплины «Математика» базируется на знаниях, умениях и компетенциях, полученных в ходе освоения школьных курсов «Алгебра и начала анализа» и «Геометрия». Базирующиеся дисциплины: «Информатика», «Теоретическая механика.

1.3. Требования к результатам освоения дисциплины

Дисциплина *Математика* в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих общепрофессиональных (ОПК) компетенций бакалавра: ***ОПК-1.***

Общепрофессиональные компетенции (ОПК):

- Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий (ОПК-1).

В результате изучения дисциплины студент ***должен***:

Знать:

– основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории математической статистики ;

– основные понятия и методы математического анализа;

– дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;

– методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;

– понятия рядов и их практическое применение в приближенных вычислениях;

Уметь:

– использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользованием и надежностью технических систем;

Владеть:

– методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит **несамостоятельное выполнение работы,** то она **не будет зачтена.**

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

<table>
<tr><th rowspan="2">№ ва-ри-анта</th><th colspan="10">Номера задач контрольных работ по вариантам</th></tr>
<tr><th colspan="6">Контрольная работа №3</th><th colspan="4">Расчётно-графическая работа №1</th></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>11</td><td>21</td><td>31</td><td>41</td><td>51</td><td>61</td><td>71</td><td>81</td><td>91</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>12</td><td>22</td><td>32</td><td>42</td><td>52</td><td>62</td><td>72</td><td>82</td><td>92</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>13</td><td>23</td><td>33</td><td>43</td><td>53</td><td>63</td><td>73</td><td>83</td><td>93</td></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td><td>14</td><td>24</td><td>34</td><td>44</td><td>54</td><td>64</td><td>74</td><td>84</td><td>94</td></tr>
<tr><td>5</td><td>5</td><td>15</td><td>25</td><td>35</td><td>45</td><td>55</td><td>65</td><td>75</td><td>85</td><td>95</td></tr>
<tr><td>6</td><td>6</td><td>16</td><td>26</td><td>36</td><td>46</td><td>56</td><td>66</td><td>76</td><td>86</td><td>96</td></tr>
<tr><td>7</td><td>7</td><td>17</td><td>27</td><td>37</td><td>47</td><td>57</td><td>67</td><td>77</td><td>87</td><td>97</td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>18</td><td>28</td><td>38</td><td>48</td><td>58</td><td>68</td><td>78</td><td>88</td><td>98</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td><td>19</td><td>29</td><td>39</td><td>49</td><td>59</td><td>69</td><td>79</td><td>89</td><td>99</td></tr>
<tr><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td><td>80</td><td>90</td><td>100</td></tr>
</table>

3. Контрольная работа №3

В задачах **1–10** найти производную.

1. $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}}{3x^3}$.

2. $y=\dfrac{(1+3x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

3. $y=\dfrac{\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}{120x^5}$.

4. $y=\dfrac{\left(3x^2-8\right)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

5. $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$.

6. $y=\dfrac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$.

8. $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$.

9. $y=\dfrac{\left(2x^2+3\right)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

10. $y=\dfrac{x-1}{\left(3x^2+5\right)\sqrt{x^2+5}}$.

В задачах **11–20** найти производную.

11. $y=(2x+3)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{2}{3}\left(4x^2+12x+11\right)\sqrt{x^2+3x+2}$,

$2x+3>0$;

12. $y=(3x^2-4x+2)\sqrt{9x^2-12x+3}+(3x-2)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x-2}$, $3x-2>0$;

13. $y=\ln\left(e^{5x}+\sqrt{e^{10x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-5x}\right)$

14. $y=\dfrac{2}{3}\left(4x^2-4x+3\right)\sqrt{x^2-x}+(2x-1)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{2x-1}$, $2x-1>0$

15. $y=\arcsin\left(e^{-4x}\right)+\ln\left(e^{4x}+\sqrt{e^{8x}-1}\right)$

16. $y=\left(3x+1\right)^4\cdot\arcsin\dfrac{1}{3x+1}+\left(3x^2+2x+1\right)\sqrt{9x^2+6x}$, $3x+1>0$

17. $y=\frac{1}{24}\left(x^2+8\right)\sqrt{x^2-4}+\frac{x^4}{16}\arcsin\frac{2}{x}$, $x>0$

18. $y=\frac{x^4}{81}\arcsin\frac{3}{x}+\frac{1}{81}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}$, $x>0$

19. $y=\ln\left(e^{3x}+\sqrt{e^{6x}-1}\right)+\arcsin\left(e^{-3x}\right)$

20. $y=3\arcsin\frac{3}{4x+1}+2\sqrt{4x^2+2x-2}$, $4x+1>0$

В задачах **21–30** найти производную функции, заданной параметрически.

21. $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y=t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\arcsin\left(t-1\right). \end{cases}$

23. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\left(2e^t\right), \\ y=\ln\operatorname{tg}e^t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x=\ln\operatorname{ctg}t, \\ y=\frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}e^{t/2}, \\ y=\sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x=\frac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y=\sin\left(\frac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$

27. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\frac{1}{\sqrt[3]{(t-1)^2}}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x=\arcsin(\cos t), \\ y=\arccos(\sin t). \end{cases}$

30. $\begin{cases} x=\ln\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

В задачах **31-35** найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

31. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

32. $z = \mathrm{arctg}\,\frac{x + y}{1 - xy}$.

33. $z = \sin^2(2x + 3y)$.

34. $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

35. $z = \ln\sqrt{2xy + y^2}$.

В задачах **36-40** проверить равенства.

36. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$, если $z = \ln(e^x + e^y)$.

37. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

38. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

39. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\cos(x^2 - y^2)$.

40. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = x\ln\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

В задачах **41-50** найти неопределённый интеграл. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

41. $\int\frac{xdx}{7 + x^2}$.

42. $\int\frac{dx}{\sin^2 5x}$.

43. $\int\frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$.

44. $\int\frac{dx}{5x + 3}$.

45. $\int\sin(2 - 3x)dx$.

46. $\int e^{4x-2}dx$.

47. $\int \frac{dx}{7+4x^2}$. **48.** $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$. **49.** $\int \cos(3x-4)dx$.

50. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.

В задачах **51-60** найти неопределённые интегралы с помощью формулы интегрирования по частям.

51. $\int (3-x)\cos x dx$. **52.** $\int x\ln(1-3x)dx$. **53.** $\int xe^{-7x}dx$.

54. $\int \operatorname{arctg} 4x dx$. **55.** $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$. **56.** $\int x\sin 5x dx$.

57. $\int (2x+5)\sin x dx$. **58.** $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$. **59.** $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$.

60. $\int xe^{3x}dx$.

4. Расчётно-графическая работа №4

В задачах **61–70** исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

61. $y=\frac{4x}{4+x^2}$. **62.** $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

63. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$. **64.** $y=\frac{x^2}{x+1}$.

65. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$. **66.** $y=\frac{4x^3+5}{x}$.

67. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

68. $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

69. $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$.

70. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

В задачах **71-80** вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

71. $\begin{cases} y=x^2+6x-5 \\ y=8x-2 \end{cases}$

72. $\begin{cases} y=x^2+x-5 \\ y=x-1 \end{cases}$

73. $\begin{cases} y=-x^2+2x-3 \\ y=4x-6 \end{cases}$

74. $\begin{cases} y=x^2-3x+7 \\ y=-x+7 \end{cases}$

75. $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=x^2-2x \end{cases}$

76. $\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=2-x \end{cases}$

77. $\begin{cases} y=2x-x^2+3 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$

78. $\begin{cases} y=-x^2+x+3 \\ y=-x \end{cases}$

79. $\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \\ y=5x-11 \end{cases}$

80. $\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \\ y=5x-11 \end{cases}$

В задачах **81 – 90** построить на плоскости *Oxy* область интегрирования заданного интеграла; изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл.

81. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dy.$

82. $\int\limits_{0}^{5} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{10x-x^2}} dy.$

83. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} dy.$

84. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} dy.$

85. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} dy.$

86. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy.$

87. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dy.$

88. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^{2/3}} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} dy.$

89. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} xdy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} xdy.$

90. $\int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} dx.$

В задачах **91–100** найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

91. $z = 2 - 12(x^2 + y^2); \quad z = 24x + 2.$

92. $z = 10\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 1; \quad z = 21 - 20x.$

93. $z = 8(x^2 + y^2) + 3; \quad z = 16x + 3.$

94. $z = 2 - 20\left[(x+1)^2 + y^2\right]; \quad z = -40x - 38.$

95. $z = 4 - 14(x^2 + y^2); \quad z = 4 - 28x.$

96. $z = 28\left[(x+1)^2 + y^2\right] + 3; \quad z = 56x + 59.$

97. $z = 32(x^2 + y^2) + 3; \quad z = 3 - 64x.$

98. $z = 4 - 6\left[(x-1)^2 + y^2\right]; \quad z = 12x - 8.$

99. $z = 2 - 4(x^2 + y^2); \; z = 8x + 2.$

100. $z = 22\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 3; \quad z = 47 - 44x.$

5. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1: Найти производную $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Решение.

Воспользуемся формулой логарифмического дифференцирования $y'=y\,(\ln y)'$.

$$\ln y=\ln\frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}=3\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{2}{5}\ln(x-3),$$

тогда $y'=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\left(\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{1}{4(x-2)}+\dfrac{2}{5(x-3)}\right)$.

Пример 2: Найти производную

$$y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}+\frac{3x^2-1}{\sin x},$$

Решение.

$$y'=\left(\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}+\frac{3x^2-1}{\sin x}\right)'=$$

$$=\left(\cos x\right)'\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)'+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}(\operatorname{arctg}\ln(2x+3))'+$$

$$+\frac{(3x^2-1)'\sin x-(3x^2-1)(\sin x)'}{(\sin x)^2}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\cos x\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}\left(1+\sin^2 x\right)'+$$

$$+e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}\frac{1}{1+(\ln(2x+3))^2}(\ln(2x+3))'+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}2\sin x\left(\sin x\right)'+$$

$$+\frac{e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}}{1+\ln^2(2x+3)}\cdot\frac{1}{2x+3}(2x+3)'+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\sin x\sqrt{1+\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}+\frac{2e^{\operatorname{arctg}\ln(2x+3)}}{(1+\ln^2(2x+3))(2x+3)}+.$$

$$+\frac{6x\sin x-(3x^2-1)\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример 3. Найти производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся формулой $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t=(e^t\sin t)'_t=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$$x'_t=(e^t\cos t)'_t=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t),$$

$$y'_x=\frac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=\frac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}.$$

Пример 4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}$,

если $z = \ln(y - x) - \ln x - \ln y$.

Решение. Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y-x}(y-x)'_x-\frac{1}{x}-0=-\frac{1}{y-x}-\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_x+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_y+0=\frac{1}{(y-x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{(y-x)^2}+\left(-\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}.$$

$\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Найти неопределённый интеграл. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$$\int\frac{dx}{x\ln x}$$

Решение.

а) $\int\frac{dx}{x\ln x}=\left|\frac{dx}{x}=d(\ln x)\right|=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C$ **.**

Проверка: $\left(\ln\left|\ln x\right|+C\right)'=\frac{1}{\ln x}\cdot(\ln x)=\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln x}$. Верно!

Пример 6. Найти неопределённые интеграл с помощью формулы интегрирования по частям. Правильность полученного результата проверить дифференцированием.

$$\int\ln(x^2+1)dx.$$

Решение.

в) $\int\ln(x^2+1)dx=\left|\begin{matrix} u=\ln(x^2+1), & du=\frac{2xdx}{x^2+1}, \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\ln(x^2+1)-$

$$-\int x\cdot\frac{2xdx}{1+x^2}=x\ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\left|\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}\right|=$$

$$=x\ln(x^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x\ln(x^2+1)-2(x-\operatorname{arctg}x)+C.$$

Проверка:

$$\left(x\ln(x^2+1)-2(x-\operatorname{arctg}x)+C\right)'=1\cdot\ln(x^2+1)+x\cdot\frac{2x}{1+x^2}-$$

$$-2\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)=\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{1+x^2}-\frac{2(1+x^2-1)}{1+x^2}=\ln(x^2+1).\text{ Верно.}$$

6. Примеры решения задач расчётно-графической работы

Пример 7. Исследовать данную функцию методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проверить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция чётной, нечётной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки её экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

$y=\sqrt[3]{x(x+6)^2}$

Решение. $y=\sqrt[3]{x(x+6)^2}$

1) Область определения: $x\in(-\infty;\infty)$

2) Функция непрерывна.

3) $y(-x)=\sqrt[3]{-x(-x+6)^2}$, чётность, нечётность, периодичность отсутствуют.

4) $y'=\left(x^{\frac{1}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x+6)^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}(x+6)^{-\frac{1}{3}}=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+6}}.$

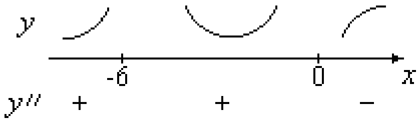
$y'=0$ при $x=-2$, y' не существует при $x=0$ и $x=-6$. Применяя метод интервалов, определяем интервалы монотонности функции.

Итак, функция возрастает при $x\in(-\infty;-6)\cup(-2;\infty)$ и убывает при $x\in(-6;-2)$.

$y(-6)=0$ – точка максимума, $y(-2)=-2\sqrt[3]{4}$ – точка минимума.

5) $y'' = \left(\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x+6}} \right)' = -\dfrac{8}{\sqrt[3]{x^5}\cdot\sqrt[3]{(x+6)^4}}.$

$y'' \neq 0$, y'' не существует при $x = 0$ и $x = -6$. Методом интервалов определяем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.



6) Вертикальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x+6)^2}}{x} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x(x+6)^2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^3 + 12x^2 + 36x} - x \right) =$$

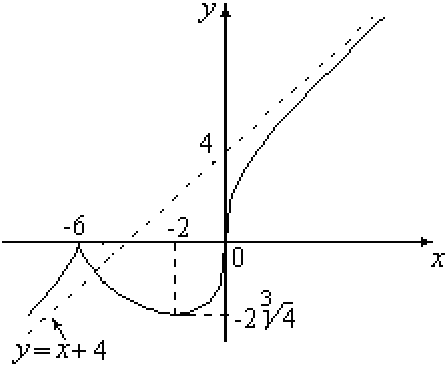
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(x\left(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{x} + \frac{36}{x^2}} - 1 \right) \right).$$

Применим теперь эквивалентность $(1+t)^\alpha - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \alpha t$. В нашем случае

$\alpha = \dfrac{1}{3}$, $t =$ $t = \dfrac{12}{x} + \dfrac{36}{x^2}$. Поэтому $b = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{12}{x} + \dfrac{36}{x^2} \right) \right) = 4.$

т.е. есть наклонная асимптота $y = x + 4$.

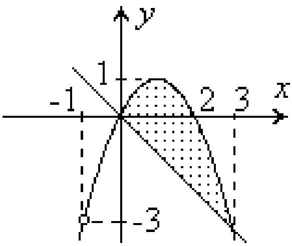
7) на основании полученных результатов строим график функции



Пример 8. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases}$$

Решение. Построим фигуру, ограниченную параболой $y = 2x - x^2$ (точки пересечения параболы с осью Оx: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, ветви параболы направлены вниз) и прямой $y = -x$.



Вычислим площадь по формуле

$S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int\limits_a^b \left(y_2(x) - y_1(x) \right) dx$, где график функции $y = f_2(x)$ ограничивает фигуру сверху, а график функции $y = f_1(x)$ – снизу. Для нахождения пределов интеграла решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2, \\ y = -x. \end{cases} \quad 2x - x^2 = -x \;,\; 3x - x^2 = 0 \;, x{=}0,\; x{=}3.$$

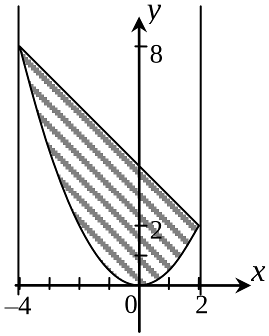
$$S = \int\limits_0^3 \left(2x - x^2 - (-x) \right) dx = \int\limits_0^3 \left(3x - x^2 \right) dx = \left. \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \right|_0^3 = 4{,}5 \,.$$

Ответ: Площадь фигуры равна 4,5.

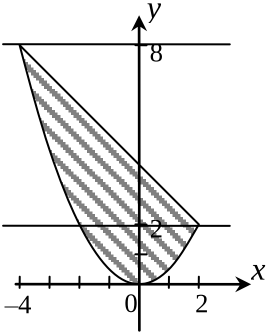
Пример 9. $I = \int\limits_{-4}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x} dy.$

Построить на плоскости Oxy область интегрирования заданного интеграла; изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл.

Решение. Область интегрирования определяется неравенствами: $-4 \le x \le 2$; $\dfrac{x^2}{2} \le y \le 4 - x$. То есть слева и справа область ограничена прямыми линиями $x = -4$ и $x = 2$, снизу – параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$, сверху – прямой $y = 4 - x$. Построив эти линии, получаем следующую область



Для того, что бы изменить порядок интегрирования, внесём в рисунок следующие изменения: уберём прямые $x = -4$ и $x = 2$ (область не изменилась) и добавим прямые $y = 0$, $y = 2$ и $y = 8$.



Выражаем x: $y=\dfrac{x^2}{2} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2y},\;\; y=4-x \quad\Rightarrow\quad x=4-y.$

Записываем интеграл с новым порядком интегрирования

$$\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{0}^{2}dy\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx+\int_{2}^{8}dy\int_{-\sqrt{2y}}^{4-y}dx.$$

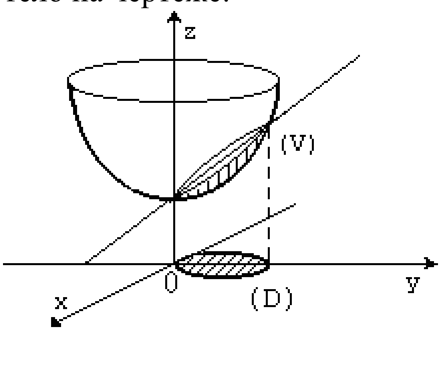
Вычислять удобнее начальный интеграл:

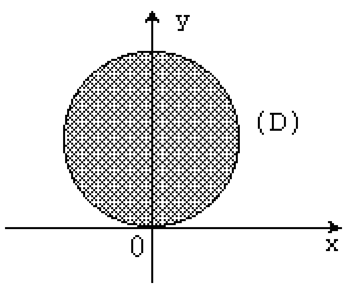
$$I=\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{-4}^{2}\left(4-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{2}=$$

$$=8-2-\frac{8}{6}+16+8-\frac{64}{6}=18$$

Пример 10. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже. $z=28(x^2+y^2)+3$; $z=56y+3$,

Решение. Тело (V) ограничено двумя поверхностями: параболоидом $z=28(x^2+y^2)+3$ и плоскостью $z=56y+3$. Изобразим это тело на чертеже:





Найдем область, в которую тело проектируется на плоскость xOy, для чего из уравнений поверхностей, ограничивающих тело, следует исключить переменную z (т.е. совершить ортогональное проектирование):

$$28(x^2+y^2)+3=56y+3; x^2+y^2=2y \quad \text{и} \quad x^2+(y-1)^2=1.$$

Таким образом, областью (D) является круг с центром в точке $(0;\ 1)$ радиуса $R=1$ (см. рис.).

Объем тела может быть вычислен с помощью тройного интеграла по формуле $V=\iiint\limits_{(V)} dv$. В декартовой системе координат тройной интеграл записывается через повторный следующим образом:

$$V=\int_{-1}^{1} dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} dy \int_{28(x^2+y^2)+3}^{56y+3} dz,$$

откуда видно, что его вычисление сопряжено со значительными трудностями (на завершающей стадии вычисления повторного интеграла).

Запишем интеграл в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), с которой декартова система связана формулами

$$x=\rho\cdot\cos\varphi, \quad y=\rho\cdot\sin\varphi, \quad z=z.$$

Якобиан преобразования $J=\rho$. Формула перехода (в интеграле) имеет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{(V')} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\ \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz.$$

В нашем случае

$$V=\iiint\limits_{(V)} dv=\iiint\limits_{(V')} \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz.$$

Запишем уравнения параболоида и плоскости в цилиндрической системе координат:

$$z=28\rho^2+3; \quad z=56\rho\cdot\sin\varphi+3.$$

Для окружности $x^2+y^2=2y$ имеем $\rho=2\sin\varphi$; угол φ, очевидно, необходимо менять в пределах от 0 до π. Таким образом ,

$$V=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho\ d\rho \int_{28\rho^2+3}^{56\rho\cdot\sin\varphi+3} dz=\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (56\rho\sin\varphi-28\rho^2)\rho\ d\rho=$$

$$=\int_0^{\pi}(56\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi-28\frac{\rho^4}{4})\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=28\int_0^{\pi}(\frac{2}{3}\cdot 8\sin^4\varphi-\frac{1}{4}\cdot 16\sin^4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{28}{3}\int_0^{\pi}4\sin^4\varphi\; d\varphi=\frac{28}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)^2\, d\varphi=$$

$$=\frac{28}{3}\int_0^{\pi}\left(1-2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=\frac{28}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi\,.$$

Ответ: $V=14\pi$.

7. Вопросы к экзамену

1. Правила дифференцирования.
2. Производные основных элементарных функций.
3. Связь дифференциала и производной.
4. Свойства дифференциала.
5. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши,
6. Правило Лопиталя.
7. Необходимое и достаточное условие возрастания функции на отрезке.
8. Необходимое условие существования экстремума.
9. Достаточные условия существования экстремума.
10. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции на отрезке.
11. Достаточное условие существования точки перегиба.
12. Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных
13. Частные производные высших порядков.
14. Необходимое и достаточное условие существования экстремума функции двух переменных.
15. Метод наименьших квадратов.
16. Теоремы о первообразных. Свойства неопределённого интеграла.
17. Интегрирование по частям.
18. Интегрирование рациональных дробей.
19. Интегрирование тригонометрических функций.
20. Верхняя и нижняя интегральная сумма. Их свойства.
21. Свойства определённого интеграла.
22. Формула Ньютона-Лейбница.
23. Правила вычисления определённых интегралов.
24. Геометрические приложения определённых интегралов.

Список основной литературы

1. Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2018. - 479 с.

2. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Список дополнительной литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.1, - М.: Интеграл –Пресс, 2006
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,.Т.2 , - М.: Интеграл –Пресс, 2006

Математика: Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы №3 и расчётно-графической работы №1

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна

Подписано к печати “__”_______ 201_ г. Формат 84×108/32
Объём 1,4 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.

Издательский центр НГАУ
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160